
REGELUNG VERTEILT- PARAMETRISCHER SYSTEME

Übungen zur Vorlesung im Sommersemester 2026

Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer
Karlsruher Institut für Technologie

REGELUNG VERTEILT-PARAMETRISCHER SYSTEME

Übungen zur Vorlesung im Sommersemester 2026

Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer

Karlsruher Institut für Technologie

Digital Process Engineering Group

Institut für Mechanische Verfahrenstechnik und Mechanik

Hertzstr. 16, Geb. 06.40

D-76187 Karlsruhe

✉ thomas.meurer@kit.edu

🌐 <http://www.mvm.kit.edu/dpe.php>

© Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer

Inhaltsverzeichnis

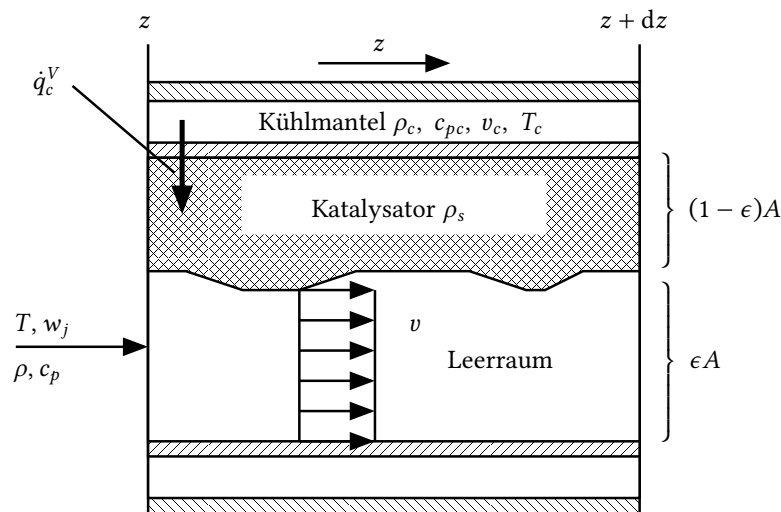
1	Mathematische Modellierung	1
1.1	Mathematisches Modell eines Rohrreaktors	1
1.2	Mathematisches Modell eines piezoelektrischen Aktuators	3
1.3	Mathematisches Modell eines elastischen Balkens mit piezoelektrischem Patch-Aktuator und Endmasse	4
2	Übertragungsfunktionen	11
2.1	Übertragungsfunktion für eine Wärmeleitungsaufgabe	11
2.2	Übertragungsfunktion für eine schwingende Saite	12
2.3	Übertragungsfunktion für einen elastischen Balken	13
2.4	Bestimmung der Polstellenverteilung für ein Diffusions-Reaktionssystem	14
3	BIBO-Stabilität	15
3.1	BIBO-Stabilisierung eines instabilen Diffusions-Reaktionssystems	15
3.2	BIBO-Stabilisierung eines elastischen Balkens	16
4	Zustandsdarstellung	19
4.1	Zustandsgleichungen für einen Euler-Bernoulli Balken	19
4.2	Spektrale Analyse für die Wärmeleitungs- und Wellengleichung	20
4.3	Spektrale Analyse für einen Euler-Bernoulli Balken	21
5	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	23
5.1	Steuerbarkeitsanalyse für einen Euler-Bernoulli Balken	23
5.2	Steuerbarkeitsanalyse für ein Diffusions-Reaktionssystem	25
5.3	Beobachtbarkeitsanalyse für ein Strömungssystem mit Reaktion	26
6	Stabilität und Stabilisierung	27
6.1	Stabilitätsanalyse nach Lyapunov für ein Diffusions-Konvektions-Reaktionssystem	27
6.2	Asymptotische Stabilisierung einer linearen Wellengleichung	28
6.3	Exponentielle Stabilisierung einer linearen Wellengleichung	29
6.4	Backstepping-basierter Beobachterentwurf für ein Diffusions-Reaktionssystem	30
7	Flachheit	31
7.1	Flachheitsbasierte Trajektorienplanung für ein Diffusions-Konvektions-Reaktionssystem	31
7.2	Flachheitsbasierte Trajektorienplanung für einen piezoelektrischen Stapelaktor	32
7.3	Flachheitsbasierte Trajektorienplanung für einen Brückenkran mit schweren Ketten	33

Übung 1

Mathematische Modellierung

1.1 Mathematisches Modell eines Rohrreaktors

Festbettreaktoren stellen in der chemischen Industrie den wichtigsten und meist verbreiteten Reaktortyp dar (Jensen und Ray, 1982; Jakobsen, 2008). Typischerweise werden entsprechend der untenstehenden Abbildung die mit Katalysatorkörnern gefüllten Rohre vom Reaktionsfluid durchströmt. Die eigentliche Reaktion findet dabei nicht in der homogenen Fluidphase statt sondern an der Oberfläche der Katalysatorkörner.



Hierbei sind ρ_s die Dichte der Katalysatorschüttung, ρ die Dichte des Fluids, v die Strömungsgeschwindigkeit des Fluids, w_j der Gewichtsanteil der Komponente j mit $j = 1, \dots, J$, T die Fluidtemperatur, c_p die spezifische Wärmekapazität des Fluids (isobar), ϵ der Leerraumanteil, A die Querschnittsfläche, ρ_c die Dichte des Kühlmittels, v_c die Strömungsgeschwindigkeit des Kühlmittels, T_c die Kühlmitteltemperatur, c_p die spezifische Wärmekapazität des Kühlmittels (isobar) und $\dot{q}_c^V$ der über die Rohrwand zu- oder abgeführte Wärmestrom (volumenbezogen).

Das obige Bild zeigt die für die Modellierung wesentlichen Größen des betrachteten Reaktors. Im Folgenden wird ein so genanntes quasihomogenes Reaktormodell ermittelt. Hierzu werden vereinfachend alle Teilschritte der am Katalysator stattfindenden Reaktionen (Diffusion, Chemisorption, Oberflächenreaktion, usw.) zu einer pauschalen Bruttoreaktionsgeschwindigkeit zusammengefasst. Des Weiteren wird vereinfachend angenommen, dass

- der Reaktor isobar betrieben wird,
- die Dichte ρ des Fluids konstant ist,
- eine Akkumulation von Stoffen nur im Leerraum ϵA stattfinden kann,
- im Leerraum Pfropfenströmung mit der konstanten Strömungsgeschwindigkeit v herrscht,
- eine vollständige Durchmischung des Fluid quer zur Strömungsrichtung vorherrscht,

- die Reaktionsgeschwindigkeit r_i , $i = 1, \dots, I$ nur von T und w_j abhängt und
- die Querschnittsfläche A und der Leerraumanteil über die Länge L des Reaktors konstant sind.

- a) Stellen Sie anhand des dargestellten differenziellen Elements die Komponentenmassenbilanz sowie die thermische Energiebilanz für das strömende Fluid auf.

Zur Energiebilanzierung ist der Zusammenhang $h = u + p/\rho$ zwischen spezifischer innerer Energie u und spezifischer Enthalpie h zu berücksichtigen. Des Weiteren gilt für Mehrstoffsysteme bei isobaren Bedingungen die kalorische Zustandsgleichung $dh = c_p dT + \sum_{j=1}^J h_j dw_j$, wobei h_j die spezifische Enthalpie der Komponente j beschreibt.

- b) Für reale Reaktoren können im Allgemeinen die Annahmen einer Pfropfenströmung sowie der idealen Durchmischung des Fluid quer zur Strömungsrichtung nicht mehr aufrecht gehalten werden. Um dies zu berücksichtigen wird das quasihomogene Reaktormodell um ein so genanntes axiales Dispersionsmodell erweitert. Hierzu werden zusätzliche axiale Dispersionsströme für die Komponenten des Fluids gemäß $\dot{m}_j^{disp} = -AD_{eff}\rho \frac{\partial w_j}{\partial z}$ sowie für die Energie mittels $\dot{q}^{disp} = -A\lambda_{eff} \frac{\partial T}{\partial z}$ eingeführt. Die Parameter D_{eff} und λ_{eff} stellen hierbei den effektiven axialen Dispersionskoeffizienten sowie die effektive axiale Wärmeleitfähigkeit dar.

Ergänzen Sie die Modellgleichungen aus a) für die Komponentenmassen und die Energie des strömenden Fluids um diese dispersiven Terme.

- c) Bestimmen Sie für das modifizierte Modell aus b) durch eine Bilanzierung an den Rändern des Reaktors $z = 0$ und $z = L$ die Randbedingungen unter der Annahme, dass an $z = 0$ eine Zufuhr von Stoffen mit Gewichtsanteil w_j^+ und Temperatur T^+ erfolgt.
- d) Vereinfachen Sie die Modellgleichungen aus b) mit Randbedingungen c) unter der Annahme isothermer Bedingungen, d.h. $T(z, t) = T^+ = \text{konstant}$.

1.2 Mathematisches Modell eines piezoelektrischen Aktuators

Piezoelektrische Stapelaktoren werden u.a. zur Schwingungsdämpfung oder zur Ventilansteuerung in modernen Einspritzsystemen eingesetzt. Dabei wird durch das Anlegen eines elektrischen Feldes eine, im Allgemeinen geringe, Längenänderung der piezo-keramischen Schichten erzeugt. Dabei können jedoch große Kräfte vom Stapelaktor auf die Struktur übertragen werden.

Der in Abbildung 1.1 schematisch abgebildete piezoelektrische Stapelaktor der Länge L besteht aus N piezoelektrischen Schichten der Querschnittsfläche A , die schaltungstechnisch in Reihe geschaltet sind. In jeder Schicht der Dicke H wird das elektrische Feld E_1 eingeprägt. Unter Vernachlässigung der Dicke der Elektroden-schichten zwischen den piezoelektrischen Schichten gilt $H \approx L/N$. Konstruktiv ist der piezo-keramische Stapel durch eine Rohrfeder mit der Federsteifigkeit k_F zwischen dem Gehäuseboden und -deckel mit den Massen m_0 bzw. m_1 vorgespannt. Der Einfluss des Gehäuses wird durch die zusätzliche Feder mit Federsteifigkeit k_G abgebildet.

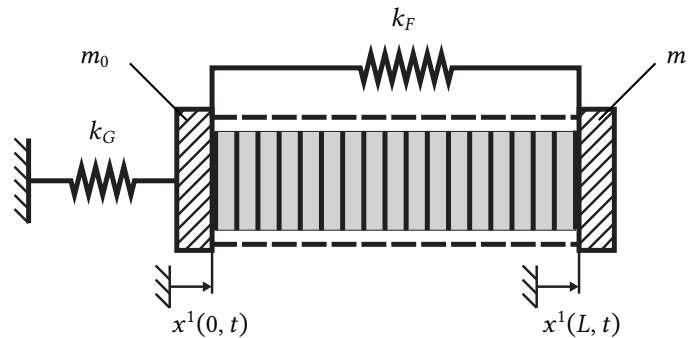


Abb. 1.1: Schematischer Aufbau des piezoelektrischen Stapelaktors.

Im Weiteren soll die partielle Differenzialgleichung der longitudinalen Bewegung $x^1(z^1, t)$ des piezoelektrischen Stapelaktors unter Verwendung des Hamiltonschen Prinzips ermittelt werden. Dabei wird angenommen, dass direkt die Ladung Q eingeprägt werden kann, welche sich durch $Q = D^1 N A$ aus der elektrischen Flußdichte in z^1 -Richtung ergibt. Die piezo-keramischen Schichten sind so ausgerichtet, dass das elektrische Feld und die mechanische Verformung in die z^1 -Richtung gerichtet sind (so genannter d_{11} -Effekt mit a_{11}^{11} als einzig relevanter Komponente des Tensors a_k^{ij}).

- Bestimmen Sie die im piezoelektrischen Stapelaktor gespeicherte kinetische und potentielle Energie $W_k(t)$ und $W_p(t)$. Betrachten Sie den Aktor hierzu als einen homogenen Stab der Länge L (siehe Anhang).
- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des piezoelektrischen Stapelaktors unter Verwendung des Hamiltonschen Prinzips. Diskutieren Sie die dabei erhaltene partielle Differenzialgleichung und charakterisieren Sie die zugehörigen geometrischen und natürlichen Randbedingungen.

1.3 Mathematisches Modell eines elastischen Balkens mit piezoelektrischem Patch-Aktuator und Endmasse

Der untenstehend abgebildete Biegebalken der Dimension $L \times B \times H$ ist mit einem auf der Balkenoberseite angebrachten piezoelektrischen Patch-Aktuator der Höhe H_p bestückt. Dieser wird mit einer Spannung $U(t)$ durch auf der Ober- und Unterseite des Patches angebrachte Elektroden versorgt. Zudem ist am Balkenende eine zusätzliche Masse M mit Trägheitsmoment J um die z^2 -Achse angebracht.

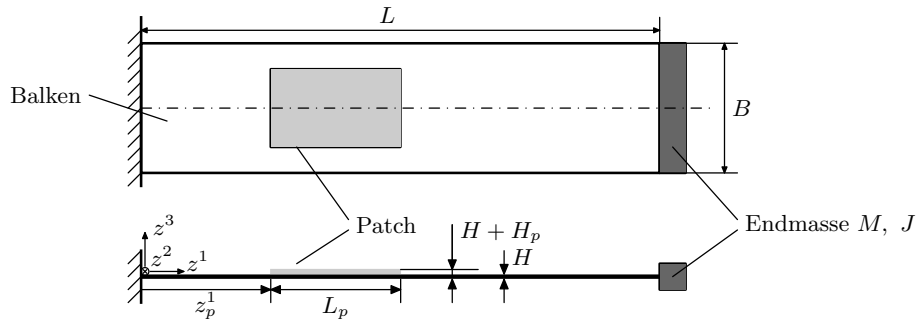


Abb. 1.2: Biegebalken mit auf der Balkenoberseite angebrachten piezoelektrischen Patch-Aktuator und Endmasse.

Im Weiteren soll die partielle Differenzialgleichung der transversalen Biegeschwingung $x^3(z^1, t)$ unter Verwendung des Hamiltonschen Prinzips ermittelt werden. Dabei wird angenommen, dass der Patch symmetrisch zur Mittellinie auf dem Balken aufgebracht ist, um die Anregung von zusätzlichen Torsionsschwingungen zu verhindern. Gravitationseinflüsse werden zudem nicht betrachtet. Der piezoelektrische Patch-Aktuator ist dabei so aufgebaut, dass je eine Elektrode auf der Ober- und Unterseite des Patches angebracht ist und die mechanische Verformung des Patches in die z^1 -Richtung gerichtet ist (so genannter d_{31} -Effekt mit a_3^{11} als einzig relevanter Komponente des Tensors a_k^{ij}).

- Bestimmen Sie die kinetische und potentielle Energie $W_k(t)$ und $W_p(t)$ der transversalen Biegeschwingung des Balkens unter Verwendung der Euler-Bernoulli Annahme. Der Einfluss des piezoelektrischen Patch-Aktuators kann dabei durch einen zusätzlichen Term $W_e(t)$ für die potenzielle Energie erfasst werden (siehe Anhang). Beachten Sie hierbei, dass der piezoelektrische Aktuator nur auf dem Intervall $z^1 \in [z_p^1, z_p^1 + L_p]$ wirkt.
- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des dargestellten piezoaktuierten Biegebalkens unter Verwendung des Hamiltonschen Prinzips. Diskutieren Sie die dabei erhaltene partielle Differenzialgleichung und charakterisieren Sie die zugehörigen geometrischen und natürlichen Randbedingungen.

Anhang: Kontinuumsmechanische Betrachtungen zur Ermittlung der potenziellen Energie piezoelektrischer Strukturen

Im Weiteren werden unter der Voraussetzung eines Euklidischen Raumes und der Beschränkung auf rein linear-elastische Probleme, einige grundlegende Konzepte der Kontinuumsmechanik im Hinblick auf die energiebasierte Modellierung flexibler mechanischer Strukturen eingeführt (siehe z.B. Marsden und Hughes, 1994; Nowacki, 1975; Reddy, 1984).

Die spezifische Verzerrungsenergie w ergibt sich unter isothermen Bedingungen und der Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention zu

$$w = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (1.1)$$

Hier stellen σ^{ij} die Komponenten des Spannungstensors und ϵ_{ij} die Komponenten des Dehnungstensors dar. Die Verzerrungsenergie W ergibt sich durch Integration von (1.1) über das von dem betrachteten Körper eingenommene Volumen, d.h.

$$W = \int_V w dV. \quad (1.2)$$

Die Bestimmung der Komponenten ϵ_{ij} illustriert Abbildung 1.3. Hier stellt C_0 die undeformierte Konfiguration des Grundkörpers zum Zeitpunkt $t = 0$ dar, während C die deformierte Konfiguration des Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ beschreibt. Die Bewegung eines Materialteilchens, das sich im undeformierten Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt Z befand in die Position z im deformierten Zustand zu einem Zeitpunkt $t > 0$ wird dabei durch die invertierbare Abbildung $z^i = z^i(Z, t)$ beschrieben.

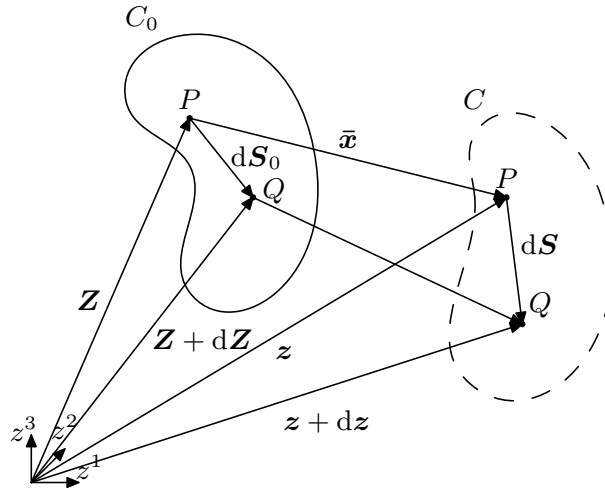


Abb. 1.3: Elastische Deformation eines Grundkörpers.

Der Abstand zwischen den beiden Materialpunkten P und Q im undeformierten und deformierten Zustand ergibt sich zu $|dS_0|^2 = dZ^i dZ^i$ bzw. $|dS|^2 = dz^i dz^i$ (Pythagoras). Die Abstandsänderung zwischen P und Q durch die Deformation des Grundkörpers kann somit direkt zu

$$|dS_0|^2 - |dS|^2 = dZ^i dZ^i - dz^i dz^i = \frac{\partial Z^i}{\partial z^m} \frac{\partial Z^i}{\partial z^n} dz^m dz^n - dz^i dz^i = \underbrace{\left(\frac{\partial Z^k}{\partial z^i} \frac{\partial Z^m}{\partial z^j} \delta_{km} - \delta_{ij} \right)}_{= 2\epsilon_{ij}} dz^i dz^j$$

bestimmt werden. Die Komponenten ϵ_{ij} des Dehnungstensors ergeben sich somit zu

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z^k}{\partial z^i} \frac{\partial Z^m}{\partial z^j} \delta_{km} - \delta_{ij} \right)$$

mit dem Kronecker-Delta δ_{ij} ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ sonst). Wegen $\bar{x} = z - Z$ liefert diese Beziehung die

Darstellung der Dehnungen in Abhängigkeit von den Verschiebungen gemäß

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial z^j} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial z^i} + \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial z^i} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial z^j} \right) \quad (1.3)$$

mit den Komponenten $\bar{x}^i$ des Verschiebungsvektors $\bar{\mathbf{x}}$. Unter der Annahme kleiner Auslenkungen mit $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial z^j} \ll 1$ vereinfacht sich (1.3) zu

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial z^j} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial z^i} \right). \quad (1.4)$$

Die Auswertung der Beziehung (1.1) erfordert einen Zusammenhang zwischen den Komponenten σ^{ij} des Spannungstensors und den Komponenten ϵ_{ij} bzw. e_{ij} des Dehnungstensors. Dieser Zusammenhang wird durch die so genannten Konstitutivgleichungen beschrieben. Im linear-elastischen Fall gilt

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl} e_{kl}, \quad (1.5)$$

wobei der Elastizitätstensor c^{ijkl} die Materialeigenschaften beschreibt. Für homogene Materialien sind alle 81 Parameter c^{ijkl} konstant. Aufgrund der Symmetrien von σ^{ij} und ϵ_{ij} reduziert sich die Anzahl der Materialparameter auf 36, da

$$c^{ijkl} = c^{jikl}, \quad c^{ijkl} = c^{ijlk}.$$

Für isotrope Materialien, die im Gegensatz zu anisotropen Materialien keine Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems aufweisen, ergibt sich im linear-elastischen Fall die Spannungs-Dehnungs-Relation zu

$$\sigma^{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{kk}, \quad (1.6)$$

wobei μ und λ so genannten Lamé Moduli darstellen. Diese liefern den Zusammenhang mit den bekannten ingenieurstechnischen Größen entsprechend

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

mit dem Schubmodul G , dem Elastizitätsmodul E sowie der Poissonzahl ν .

Im Folgenden werden die im Rahmen der klassischen Theorie von Stäben und Balken getroffenen Annahmen zusammengefasst. Dabei werden nur ungekrümmte Strukturen betrachtet.

Axiale Auslenkung von Stäben

Hierbei werden typischerweise die folgenden Annahmen getroffen:

- Der Querschnitt des Stabs ist beliebig, jedoch entweder gleichförmig oder in axialer Richtung stetig variierend.
- Der Elastizitätsmodul E ist eine stetige Funktion der axialen Koordinate.
- Einwirkende Lasten wirken nur in Richtung der Mittellinie des Stabes.
- Die einwirkenden Lasten sind kleiner als die kritische Knicklast.

Im Weiteren wird angenommen, dass die Mittellinie des Stabes mit der z^1 -Achse übereinstimmt. Somit ergibt sich die einzige nicht verschwindende Komponente des Verschiebungsfeldes $\bar{\mathbf{x}}(z, t)$ zu $\bar{x}^1(z, t) = x^1(z^1, t)$ was auf $e_{11} = \frac{\partial x^1(z^1, t)}{\partial z^1}$ und $e_{ij} = 0$ für $i, j \neq 1$ führt. Die Auswertung von (1.2) mit (1.1) und (1.6) führt unter Vernachlässigung der Querkontraktion ($\nu = 0$) und mit den oben genannten Annahmen auf die Verzerrungsenergie

$$W = \frac{1}{2} \int_V E e_{11}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial x^1(z^1, t)}{\partial z^1} \right)^2 dz^1. \quad (1.7)$$

Euler–Bernoulli Balken

Transversal auf Balken einwirkende Lasten wie externe Kräfte und Momente können zur Biegung, zur Torsion und/oder zum Knicken des Balkens führen. Im Rahmen der linearen Theorie können diese Effekte einzeln zur Gesamtbewegung superpositioniert werden. Zur Beschreibung der Biegebewegung eines geraden schubstarren Balkens im Rahmen der so genannten Euler–Bernoulli Theorie werden neben der geometrischen Einschränkung, dass

- a) der Querschnitt des Balkens beliebig ist, jedoch entweder gleichförmig oder in axialer Richtung stetig variierend,

zusätzliche Annahmen getroffen:

- b) die Balkenquerschnitte bleiben eben,
- c) die Balkenquerschnittsgestalt bleibt erhalten,
- d) die Querverschiebungen im Querschnitt sind konstant und
- e) Materialpunkte die auf einer Fläche senkrecht zur Balkenachse liegen befinden sich auch nach der Verformung auf einer ebenen Fläche senkrecht zur verformten Balkenachse.

Im Weiteren wird angenommen, dass die Mittellinie des Balkens mit der z^1 -Achse übereinstimmt. Mit den obigen Annahmen ergeben sich die Komponenten des Verschiebungsfeldes $\bar{x}(z, t)$ zu

$$\bar{x}^1(z, t) = x^1(z^1, t) - z^3 \frac{\partial x^3(x^1, t)}{\partial z^1}, \quad (1.8)$$

$$\bar{x}^2(z, t) = 0 \quad (1.9)$$

$$\bar{x}^3(z, t) = x^3(z^1, t). \quad (1.10)$$

Dabei beschreiben $x^1(z^1, t)$ und $x^3(z^1, t)$ die longitudinale und transversale Bewegung des Balkens bzgl. der Mittellinie. Die Komponenten e_{ij} des Dehnungstensors ergeben sich somit zu

$$e_{11} = \frac{\partial x^1(z^1, t)}{\partial z^1} - z^3 \frac{\partial^2 x^3(x^1, t)}{\partial (z^1)^2} \quad (1.11)$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq 1, j \neq 1. \quad (1.12)$$

Mit (1.6) und der Vernachlässigung des Querkontraktion ($\nu = 0$) führt dies auf

$$\sigma^{11} = E \left(\frac{\partial x^1(z^1, t)}{\partial z^1} - z^3 \frac{\partial^2 x^3(x^1, t)}{\partial (z^1)^2} \right) \quad (1.13)$$

$$\sigma^{ij} = 0, \quad i \neq 1, j \neq 1. \quad (1.14)$$

Somit ergibt sich die Verzerrungsenergie (1.2) mit (1.1) und (1.13), (1.14) zu

$$U = \frac{1}{2} \int_V E e_{11}^2 dV.$$

Unter der Annahme eines konstanten Querschnitts der Breite B und der Höhe H vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} E \left(\frac{\partial x^1(z^1, t)}{\partial z^1} - z^3 \frac{\partial^2 x^3(x^1, t)}{\partial (z^1)^2} \right)^2 dz^3 dz^2 dz^1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EA \left(\frac{\partial x^1(z^1, t)}{\partial z^1} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 x^3(x^1, t)}{\partial (z^1)^2} \right)^2 \right\} dz^1 \end{aligned} \quad (1.15)$$

mit der Querschnittsfläche $A = BH$ und dem Flächenträgheitsmoment $I = BH^3/12$. Insbesondere zeigt (1.15) die einzelnen Anteile der longitudinalen und transversalen Bewegung des Balkens an der Verzerrungsenergie.

Piezelektrische Strukturen

Im Folgenden werden ausgehend von den Ausführungen in Nowacki, 1975 die sich ergebenden Konstitutivgleichungen für piezelektrische Materialien angegeben. Für deren physikalische Motivation und Herleitung wird auf die angegebene Literatur und dortige Referenzen verwiesen. Die in der Realität auftretenden nichtlinearen Effekte wie Hysterese oder Kriechen werden vernachlässigt.

Aufgrund der Kristallstruktur weisen piezelektrische Materialien im Allgemeinen ein anisotropes Materialverhalten auf. Die entsprechenden Konstitutivgleichungen ergeben sich zu

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl} \epsilon_{kl} - a_k^{ij} D^k \quad (1.16)$$

$$E_i = -a_i^{kl} \epsilon_{kl} + \beta_{ik} D^k. \quad (1.17)$$

Neben den mechanischen Größen treten hier die elektrische Flußdichte D^k und die elektrische Feldstärke E_i sowie der Tensor der Materialparameter a_k^{ij} und der Dielektrizitätstensor β_{ik} auf. Die Parameter erfüllen dabei die Bedingungen $a_k^{ij} = a_k^{ji}$ und $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Offensichtlich führt eine mechanische Dehnung zu einer Veränderung des elektrischen Feldes (vgl. (1.17)), was als direkter piezelektrischer Effekt bezeichnet wird. Dem gegenüber führt eine Veränderung der elektrischen Flußdichte zu einer mechanischen Deformation (vgl. (1.16)), was als indirekter piezelektrischer Effekt bezeichnet wird.

Die gesamte gespeicherte potenzielle Energie setzt sich somit aus der mechanischen Verzerrungsenergie (1.2) und der elektrostatischen Feldenergie

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^V E_i D^i dV \quad (1.18)$$

zusammen. Mit (1.16) und (1.17) führt dies im linear-elastischen Fall auf

$$W_p = W + W_e = \frac{1}{2} \int_V (\sigma^{ij} e_{ij} + E_i D^i) dV \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V (c^{ijkl} e_{kl} e_{ij} - 2a_k^{ij} D^k e_{ij} + \beta_{ik} D^k D^i) dV. \quad (1.20)$$

Der mechanische Anteil wird dabei entsprechend den obigen beispielhaften Ausführungen für Stäbe und Balken ermittelt. Bei der Auswertung einer gekoppelten Struktur bestehend aus mechanischem Träger und piezelektrischer Aktor- oder Sensorschicht ist bei der Auswertung des Volumenintegrals die jeweilige Dicke und Breite der einzelnen Materialien sowie ggf. deren geometrische Position auf der Gesamtstruktur zu beachten.

Unter der Annahme einer piezelektrischen Schicht im Intervall $z^3 \in [a, b]$ mit Elektroden auf der Ober- und Unterseite des Aktuators gilt, dass

$$\int_a^b E_3 dz^3 = U, \quad (1.21)$$

mit U der zwischen den Elektroden angelegten elektrischen Spannung.

Literatur

- Jakobsen, H. (2008). *Chemical Reactor Modeling – Multiphase Reactive Flows*. Berlin Heidelberg: Springer (siehe S. 1).
- Jensen, K. und W. Ray (1982). „The bifurcation behavior of tubular reactors“. In: *Chem. Eng. Sci.* 37.2, S. 199–222 (siehe S. 1).
- Marsden, J. und T. Hughes (1994). *Mathematical foundations of elasticity*. Mineola: Dover Publications Inc. (siehe S. 5).
- Nowacki, W. (1975). *Dynamic problems of thermoelasticity*. Warszawa: Noordhoff Int. Publ., PWN–Polish Scientific Publ. (siehe S. 5, 8).
- Reddy, J. (1984). *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. New York: Wiley–Interscience (siehe S. 5).

Übung 2

Übertragungsfunktionen

2.1 Übertragungsfunktion für eine Wärmeleitungsaufgabe

Die Beeinflussung der Temperatursausbreitung $x(z, t)$ in einem System erfolge durch eine punktweise örtlich verteilte Stellgröße. Zur späteren Realisierung einer Regelung wird angenommen, dass die Messung ebenfalls örtlich verteilt erfolgt. Die Modellierung des betrachteten Prozesses führt dabei auf die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + b(z)u(t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0$$

für $a > 0$ mit den Randbedingungen

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = \frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = 0, \quad t > 0$$

und der Gleichung für die Ausgangsgröße

$$y(t) = \int_0^1 c(z)x(z, t)dz.$$

Die Anfangsbedingung wird vereinfachend zu $x_0(z) = 0$ angenommen. Die Ortscharakteristiken sind dabei durch

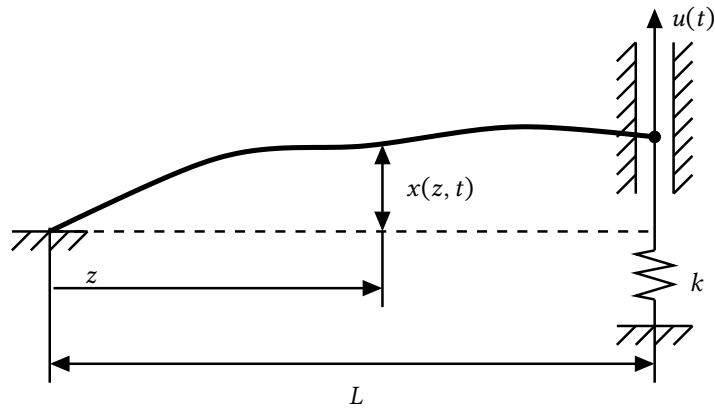
$$b(z) = \frac{1}{2\epsilon} (\sigma(z - z_0 + \epsilon) - \sigma(z - z_0 - \epsilon)), \quad c(z) = \frac{1}{2\nu} (\sigma(z - z_1 + \nu) - \sigma(z - z_1 - \nu))$$

mit der Heaviside Funktion $\sigma(\cdot)$ und den Parameter $\epsilon > 0$, $\nu > 0$ sowie $0 \leq z_1 < z_0 \leq 1$ gegeben.

- Bestimmung Sie die Übertragungsfunktion $G_{uy}(s)$.
- Ermitteln Sie die Polstellen von $G_{uy}(s)$ und illustrieren Sie diese graphisch in der s -Ebene.

2.2 Übertragungsfunktion für eine schwingende Saite

Die Bewegungsgleichung zur mathematischen Beschreibung der transversalen Schwingung mit Auslenkung $x(z, t)$ für die untenstehend dargestellte Saite wurde in Beispiel 1.1.1 unter Verwendung des Hamiltonschen Prinzips bestimmt.



Dabei ergab sich unter der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens eine Beschreibung in Form einer Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, L), \quad t > 0, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

mit den Randbedingungen

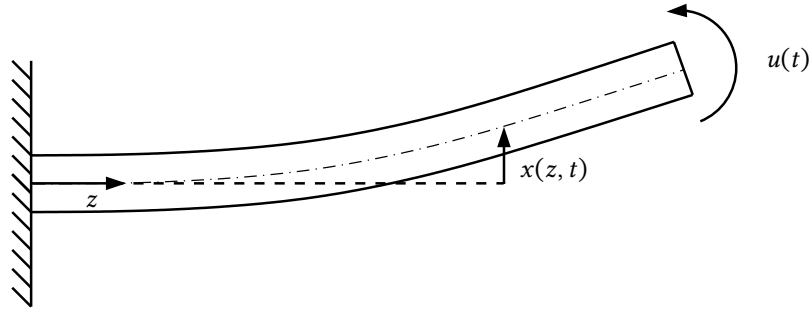
$$x(0, t) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) + kx(L, t) = u(t)$$

Für die weitere Analyse wird vereinfachend angenommen, dass sich die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befindet mit $x(z, 0) = \partial x / \partial t(z, 0) = 0$. Als interessierende Regelgröße wird die Auslenkung der Saite an $z = L$ gewählt, d.h.

$$y(t) = x(L, t).$$

- Bestimmung Sie die Übertragungsfunktion $G_{uy}(s)$.
- Ermitteln Sie die Polstellen von $G_{uy}(s)$ und illustrieren Sie diese graphisch in der s -Ebene. Wie verändert sich die Verteilung der Polstellen, wenn (2.1) um einen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsterm ($\alpha \partial x(z, t) / \partial t$ mit $\alpha > 0$) erweitert wird?

2.3 Übertragungsfunktion für einen elastischen Balken



Für den obenstehend dargestellten einseitig eingespannten elastischen Balken ergeben sich die (normierten) Bewegungsgleichungen unter der Annahme so genannter modaler Dämpfung mit Dämpfungsparameter $\beta > 0$ zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} &= 0, & z \in (0, 1), t > 0 \\ x(0, t) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) &= 0 & t > 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(1, t) = u(t), \quad \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}(1, t) &= 0 & t > 0 \end{aligned}$$

Dabei dient als Stellgröße das am Rand $z = 1$ eingeprägte externe Moment $u(t)$. Als Regelgröße wird im Folgenden die Auslenkung am Balkenende

$$y(t) = x(1, t)$$

betrachtet.

- Bestimmung Sie die Übertragungsfunktion $G_{uy}(s)$.
- Zeige Sie, dass sich $G_{uy}(s)$ in die Form

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_{uy}(s) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^4(s)}{\psi_n^4} \right)}{2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^4(s)}{\phi_n^4} \right)} \quad (2.2)$$

überführen lässt, wobei $q^4(s) = -(s^2 + \beta s)$. Dabei stellen ψ_n und ϕ_n für $n \in \mathbb{N}$ die Nullstellen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\psi_n) \sinh(\psi_n) &= 0 \\ 1 + \cos(\phi_n) \cosh(\phi_n) &= 0 \end{aligned}$$

dar.

- Illustrieren Sie unter Nutzung von (2.2) graphisch die Verteilung der Polstellen in der s -Ebene.

2.4 Bestimmung der Polstellenverteilung für ein Diffusions-Reaktionssystem

Im Folgenden soll für das Modell eines verfahrenstechnischen Prozesses in Form von zwei gekoppelten linearen Diffusions-Reaktionsgleichungen die Übertragungsfunktion $G_{uy}(s)$ ermittelt und analysiert werden. Der Prozess wird dabei durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 x_1(z, t)}{\partial z^2} - x_1(z, t) + r_1 x_2(z, t), & z \in (0, 1), \quad t > 0 \\ \frac{\partial x_2(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 x_2(z, t)}{\partial z^2} + r_2 x_1(z, t), & z \in (0, 1), \quad t > 0\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial z}(0, t) &= 0, \quad x_1(1, t) = u(t), & t > 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial z}(0, t) &= 0, \quad x_2(1, t) = 0, & t > 0\end{aligned}$$

beschrieben. Vereinfachend wird angenommen, dass $x_1(z, 0) = x_2(z, 0) = 0$.

- a) Bestimmung Sie die Übertragungsfunktionen $G_{ux_1}(z, s)$ und $G_{ux_2}(z, s)$ in Abhängigkeit von r_1 und r_2 .

Hinweis: Zur analytischen Lösung des sich ergebenden Randwertproblems wird die Verwendung eines Computer-Algebra Programms, z.B. MAPLE oder MATHEMATICA empfohlen.

- b) Illustrieren Sie graphisch die Verteilung der Polstellen in der s -Ebene für verschiedene Wertepaare (r_1, r_2) . Ermitteln Sie dabei die Anzahl der Lösungswege.

Hinweis: Hierzu ist es erforderlich die Nullstellen der jeweiligen transzendenten Nennerterme von $G_{ux_1}(z, s)$ und $G_{ux_2}(z, s)$ numerisch zu ermitteln.

Übung 3

BIBO–Stabilität

3.1 BIBO–Stabilisierung eines instabilen Diffusions–Reaktionssystems

Im Folgenden soll eine geeignete BIBO–stabilisierende Ausgangsrückführung für die Diffusions–Reaktionsgleichung

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \mu x(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0$$

mit den Randbedingungen

$$x(0, t) = u(t), \quad \frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = 0, \quad t > 0$$

und der Gleichung für die Ausgangsgröße

$$y(t) = x(1, t)$$

entworfen werden. Die Anfangsbedingung wird vereinfachend zu $x(z, 0) = x_0(z) = 0$ angenommen.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_{uy}(s)$ und berechnen Sie die Polstellen von $G_{uy}(s)$. Für welche Werte von μ treten Polstellen in der komplexen rechten Halbebene $\Re\{s\} > 0$ auf?
- Ermitteln Sie unter Verwendung der Produktdarstellung

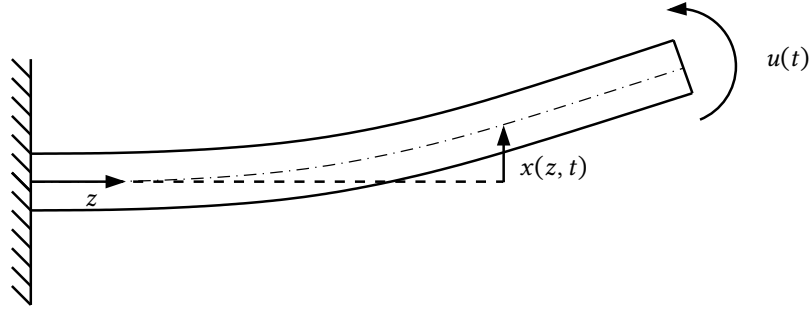
$$\cosh(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \right)$$

die Koeffizienten α_k , $k \in \mathbb{N}$, der eine Reihendarstellung

$$G_{uy}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1 + \frac{s-\mu}{\pi^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2}}.$$

- Zeigen Sie unter Verwendung der obigen Reihendarstellung, dass $G_{uy}(s) \in \hat{\mathcal{B}}(0)$ für alle beschränkten $\mu > 0$.
- Bestimmen Sie die Nyquistkurve $G_{uy}(i\omega)$ und analysieren Sie den Phasenverlauf sowie die Menge der Schnittpunkte der Nyquistkurve mit der $\Re\{G_{uy}(i\omega)\}$ –Achse.
- Welche Bedingungen müssen an die Übertragungsfunktion $G_r(s)$ einer Ausgangsrückführung gestellt werden, um die BIBO–Stabilität des geschlossenen Kreises zu gewährleisten? Entwerfen Sie eine BIBO–stabilisierende Ausgangsrückführung für den Fall $\mu = \pi^2/4 + 2$.

3.2 BIBO–Stabilisierung eines elastischen Balkens



Für den obenstehend dargestellten einseitig eingespannten elastischen Balken ergeben sich die (normierten) Bewegungsgleichungen unter der Annahme so genannter modaler Dämpfung mit Dämpfungsparameter $\beta > 0$ zu

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} = 0, \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (3.1)$$

$$x(0, t) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0 \quad t > 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(1, t) = -u(t), \quad \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}(1, t) = 0 \quad t > 0 \quad (3.3)$$

Dabei dient als Stellgröße das am Rand $z = 1$ eingeprägte externe Moment $u(t)$. Als Regelgröße wird im Folgenden die Auslenkung am Balkenende

$$y(t) = x(1, t) \quad (3.4)$$

betrachtet. In Aufgabe 3.3 wurde gezeigt, dass sich die Übertragungsfunktion $G_{uy}(s)$ in die Form

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_{uy}(s) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^4(s)}{\psi_n^4} \right)}{2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^4(s)}{\phi_n^4} \right)} \quad (3.5)$$

überführen lässt, wobei $q^4(s) = -(s^2 + \beta s)$. Dabei stellen ψ_n und ϕ_n für $n \in \mathbb{N}$ die Nullstellen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\psi_n) \sinh(\psi_n) &= 0 \\ 1 + \cos(\phi_n) \cosh(\phi_n) &= 0 \end{aligned}$$

dar. Damit können die folgenden Eigenschaften von $G_{uy}(s)$ nachgewiesen werden (siehe Meurer u. a., 2008):

(i) $G_{uy}(s)$ ist eine meromorphe Funktion und konvergiert in der gesamten abgeschlossenen komplexen Halbebene $\overline{\mathbb{C}}_0^+$.

(ii) $G_{uy}(s)$ strikt proper ist, d.h. $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{\{s \in \overline{\mathbb{C}}_0^+ \mid |s| \geq \rho\}} |G_{uy}(s)| = 0$.

(iii) Die Nyquistkurve $G_{uy}(i\omega)$ mit $\omega \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ besitzt die Grenzwerte

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{uy}(i\omega) = 1/2, \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} G_{uy}(i\omega) = 0.$$

(iv) Sei $\beta < 2\phi_1^2$, dann schneidet die Nyquistkurve $G_{uy}(i\omega)$ mit $\omega \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ die reelle Achse nur für $\omega = 0$ und $\omega \rightarrow \pm\infty$. Die Phase $\varphi(\omega) = \arg(G_{uy}(i\omega))$ ist dabei auf die offenen Intervalle $\varphi(\omega) \in (-\pi, 0)$ für $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi(\omega) \in (0, \pi)$ für $\omega \in \mathbb{R}^-$ beschränkt. Zudem existieren außer für $\omega \rightarrow \pm\infty$ keine Berührungspunkte mit der $\Re\{G_{uy}(i\omega)\}$ -Achse.

Nutzen Sie diese Angaben zur Lösung der folgenden Aufgaben. Setzen Sie dabei $\beta < 2\phi_1^2$ voraus.

- a) Bestimmen Sie die Impulsantwort $g_{uy}(t)$ unter Verwendung von (3.5) und zeigen Sie damit, dass $G_{uy}(s) \in \hat{B}(0)$.
- b) Ermitteln Sie mittels des graphischen BIBO-Stabilitätstests die Reglerparameter K_I bzw. K_D und T_D für
- einen I -Regler $G_r(s) = K_I/s$ und
 - einen D - T_1 -Regler $G_r(s) = K_D s/(1 + T_D s)$
- so, dass die BIBO-Stabilität des geschlossenen Regelkreises garantiert wird.

Zusatzaufgabe: Geben Sie neben der Realisierbarkeit noch einen weiteren (mathematischen) Grund für die Notwendigkeit der Analyse eines D - T_1 -Reglers im Gegensatz zu einem D -Regler an.

Literatur

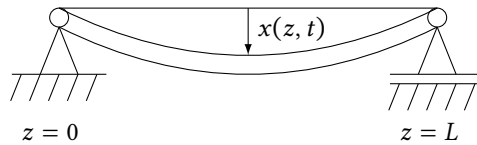
Meurer, T., D. Thull und A. Kugi (2008). „Flatness-Based Tracking Control of a Piezoactuated Euler–Bernoulli Beam with Non-Collocated Output Feedback: Theory and Experiments“. In: *International Journal of Control* 81.3, S. 475–493 (siehe S. 16).

Übung 4

Zustandsdarstellung

4.1 Zustandsgleichungen für einen Euler–Bernoulli Balken

Für ein einfaches Modell eines elastischen Balkens soll im Folgenden die korrekte Formulierung der Zustandsgleichungen untersucht werden. Im Fall eines beidseitig ideal gelagerten Balkens



ergeben sich die Bewegungsgleichungen für die transversale Auslenkung $x(z, t)$ zu

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + \Lambda \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} &= 0, & z \in (0, L), \quad t > 0 \\ x(z, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} &= 0, & z \in \{0, L\}, \quad t > 0 \\ x(z, 0) = x_0 \sin\left(m\pi \frac{z}{L}\right), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) &= 0, & z \in [0, L] \end{aligned}$$

mit der Masse pro Einheitslänge μ , $\Lambda = EI$ mit Elastizitätsmodul E und Trägheitsmoment I und beliebigem aber festem $m \in \mathbb{N}$.

- Gegeben Sie die Zustandsgleichungen und deren Lösung an, wenn $x(z, t)$ und $\frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$ als Zustandskoordinaten gewählt werden. Überprüfen Sie die Wohl-Definiertheit im Sinn von Hadamard für die Wahl des Zustandsraums $X = L^2(0, L) \oplus L^2(0, L)$ mit innerem Produkt $\langle \phi, \psi \rangle_X = \langle \phi_1, \psi_1 \rangle_{L^2} + \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_{L^2}$ und der entsprechenden induzierten Norm $\|\phi\|_X = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_X}$.
- Verwenden Sie abweichend von a) die Energiekoordinaten $\sqrt{\mu} \frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$ und $\sqrt{\Lambda} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}$ als Zustandskoordinaten und überprüfen Sie die Wohl-Definiertheit im Zustandsraum $X = L^2(0, L) \oplus L^2(0, L)$.

4.2 Spektrale Analyse für die Wärmeleitungs- und Wellengleichung

Gegeben sei der lineare Operator

$$Ax(z) = \frac{d^2 x(z)}{dz^2}$$

mit Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ x(z) \in L^2(0, L) \mid x(z), \frac{dx(z)}{dz} \text{ abs. stetig, } \frac{d^2 x(z)}{dz^2} \in L^2(0, L) \text{ mit } \frac{dx}{dz}(0) = \frac{dx}{dz}(L) = 0 \right\}.$$

- Weisen Sie nach, dass A einen selbst-adjungierten Operator darstellt.
- Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_n und zugehörigen Eigenfunktionen $\phi_n(z)$ des Operators A . Überprüfen Sie dabei, ob $\lambda_0 = 0$ einen Eigenwert darstellt und ermitteln Sie ggf. die zugehörige Eigenfunktion $\phi_0(z)$.
- Nutzen Sie die Ergebnisse aus a) und b) zur Ermittlung der spektralen Darstellung in Form gewöhnlicher Differenzialgleichungen in den Zuständen $x_n(t) = \langle x(z, t), \phi_n(z) \rangle_{L^2}$ sowohl für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, & z \in (0, L), \quad t > 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) &= \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0, & t > 0 \\ x(z, 0) &= x_0(z), & z \in [0, L] \end{aligned}$$

als auch für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, & z \in (0, L), \quad t > 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) &= \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0, & t > 0 \\ x(z, 0) &= x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z), & z \in [0, L]. \end{aligned}$$

Leiten Sie hieraus Aussagen über die dynamischen Eigenschaften der beiden Systeme ab.

4.3 Spektrale Analyse für einen Euler–Bernoulli Balken

Die Bewegungsgleichungen für einen einseitig eingespannten Balken ergeben sich unter der Euler–Bernoulli Annahme zu

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + \Lambda \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} &= 0, & z \in (0, L), \quad t > 0 \\ x(0, t) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) &= 0, & t > 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}(L, t) &= 0, & t > 0 \\ x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) &= 0, & z \in [0, L]\end{aligned}$$

mit der Masse pro Einheitslänge μ sowie $\Lambda = EI$ mit dem Elastizitätsmodul E und dem Trägheitsmoment I .

- a) Geben Sie die operatortheoretische Darstellung des Systems mit den Zustandskoordinaten $x_1(t) = x(\cdot, t)$ und $x_2(t) = \frac{\partial x(\cdot, t)}{\partial t}$ im Zustandsraum $X = H^2(0, L) \oplus L^2(0, L)$ mit innerem Produkt

$$\langle \phi, \psi \rangle_X = \int_0^L \Lambda \frac{d^2 \phi_1}{dz^2} \overline{\frac{d^2 \psi_1}{dz^2}} dz + \int_0^L \mu \phi_2 \overline{\psi_2} dz$$

und der entsprechenden induzierten Norm $\|\phi\|_X = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_X}$ an.

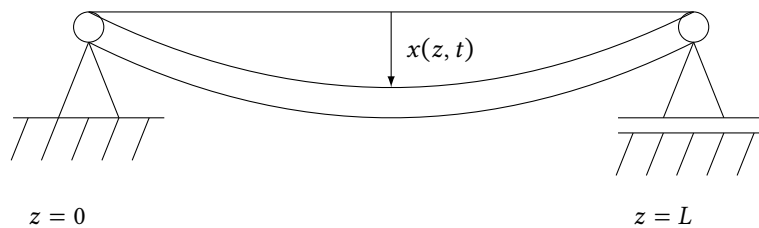
- b) Wie lautet die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte λ_n des in a) formulierten Operators A ? Bestimmen Sie numerisch die Eigenwerte $\{\lambda_n\}_{n=1}^{10}$ für $\mu = 0.07 \text{ kg/m}^{-1}$ und $\Lambda = 0.12 \text{ Nm}^2$. Stellen Sie diese graphisch dar.
- c) Geben Sie in allgemeiner Form die Eigenfunktionen $\phi_n(z) = [\phi_{1,n}(z), \phi_{2,n}(z)]^T$ so an, dass $\langle \phi_n, \phi_m \rangle_X = \delta_{n,m}$. Stellen Sie $\phi_{1,n}(z)$ für $n = 1, 2, 3$ graphisch dar.

Übung 5

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

5.1 Steuerbarkeitsanalyse für einen Euler–Bernoulli Balken

Auf Basis eines Modells eines elastischen Balkens soll im Folgenden ein Aktoren so platziert werden, dass die approximative Steuerbarkeit des verteilt-parametrischen Systems gewährleistet wird. Hierzu wird ein beidseitig ideal gelagerter Balken betrachtet



dessen Bewegungsgleichungen für die transversale Auslenkung $x(z, t)$ sich zu

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + \Lambda \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} &= b(z)u(t), & z \in (0, L), \quad t > 0 \\ x(z, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} &= 0, & z \in \{0, L\}, \quad t > 0 \\ x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) &= x_1(z), & z \in [0, L] \end{aligned}$$

ergeben. Hier stellt μ die Masse pro Einheitslänge dar und $\Lambda = EI$ mit dem Elastizitätsmodul E und dem Trägheitsmoment I .

- Überführen Sie die Balkengleichung in eine Zustandsdarstellung mit den Zustandskoordinaten $x_1(t) = x(\cdot, t)$ und $x_2(t) = \frac{\partial x(\cdot, t)}{\partial t}$. Gegeben Sie den Systemoperator A und dessen Definitionsbereich $D(A)$ sowie den Eingangoperator $B = \mathbf{b}$ an. Nutzen Sie hierbei als Zustandsraum den Hilbertraum $X = H^2(0, L) \oplus L^2(0, L)$ mit innerem Produkt $\langle \phi, \psi \rangle_X = \Lambda \langle \frac{d^2 \phi_1}{dz^2}, \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \rangle_{L^2} + \mu \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_{L^2}$ und der entsprechenden induzierten Norm $\|\phi\|_X = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_X}$.
- Bestimmen Sie den adjungierten Operator A^* . Ist der Operator selbst-adjungiert? Welche Konsequenzen ergeben sich hieraus für die Lage der Eigenwerte von A ?

Hinweis: Machen Sie hierbei von folgender Gleichungskette für die Eigenfunktion $\phi(z)$, die adjungierte Eigenfunktion $\psi(z)$ und den zugehörigen Eigenwert λ Gebrauch

$$\langle A\phi, \psi \rangle_X = \lambda \langle \phi, \psi \rangle_X = \langle \phi, A^* \psi \rangle_X = \langle \phi, \bar{\lambda} \psi \rangle_X$$

- Bestimmen Sie die Eigenfunktionen $\phi(z)$ und Eigenwerte λ .

- d) Analysieren Sie die approximative Steuerbarkeit des Systems für einen punktförmigen Eingriff $b(z) = \delta(z - \bar{z})$ und einen örtlich verteilten Eingriff mit der allgemeinen Ortscharakteristik $b(z)$.

5.2 Steuerbarkeitsanalyse für ein Diffusions–Reaktionssystem

Im Folgenden soll die Steuerbarkeit für die Diffusions–Reaktionsgleichung

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \mu x(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (5.1a)$$

mit so genannten Dankwerts–Randbedingungen

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = \alpha(x(0, t) + u(t)), \quad \frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.1b)$$

analysiert werden. Dabei stellt $u(t)$ den Randeingriff in das System dar.

- a) Überführen Sie das System in eine spektrale Systemdarstellung in den (modalen) Zuständen $x_k(t) = \langle x(z, t), \psi_k(z) \rangle_{L^2(0,1)}$ mit den Funktionen $\psi_k(z)$ aus $A\psi_k(z) = \lambda_k \psi_k(z)$, $\psi_k(z) \in D(A)$. Verwenden Sie hierzu den Greenschen Satz (2. Greensche Formel) sowie den Operator

$$Ax = \frac{d^2 x}{dz^2}$$

mit Definitionsgebiet

$$D(A) = \left\{ x \in L^2(0, 1) : x, \frac{dx}{dz} \text{ abs. stetig, } \frac{d^2 x}{dz^2} \in L^2(0, 1), \frac{dx}{dz}(0) - \alpha x(0) = \frac{dx}{dz}(1) = 0 \right\}.$$

- b) Analysieren Sie die approximative Steuerbarkeit des Systems auf Basis der spektralen Systemdarstellung.

Eine alternative Formulierung für Systeme mit Randeingriff kann durch die Homogenisierung der Randbedingungen ermittelt werden. Hierzu wird der Ansatz $x(z, t) = \tilde{x}(z, t) + \bar{x}(z, t)$ verwendet, wobei die Funktion $\bar{x}(z, t)$ so zu bestimmen ist, dass (5.1) im neuen Zustand $\tilde{x}(z, t)$ homogene Randbedingungen aufweist.

- c) Bestimmen Sie ein geeignetes $\bar{x}(z, t)$ sowie die transformierte Systemdarstellung in $\tilde{x}(z, t)$.
- d) Nutzen Sie die Ergebnisse aus Teil a) zur Analyse der approximativen Steuerbarkeit des transformierten Systems. Erläutern Sie das Ergebnis insbesondere im Bezug zur Analyse in b).

5.3 Beobachtbarkeitsanalyse für ein Strömungssystem mit Reaktion

Die Struktureigenschaft der Beobachtbarkeit bedingt die eindeutige Rekonstruierbarkeit des Anfangszustandes aus der Kenntnis des Ausgangs. Diese Eigenschaft soll im Folgenden für ein Strömungssystem mit Reaktion beschrieben durch

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = \mu x(z, t), \quad z \in (0, L), \quad t > 0 \quad (5.2a)$$

mit $v > 0$, $\mu \neq 0$ und der Randbedingung

$$x(0, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (5.2b)$$

sowie der Anfangsbedingung

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, L] \quad (5.2c)$$

analysiert werden. Die Messung

$$y(t) = x(z_m, t)$$

erfolgt dabei am Messort $z_m \in [0, L]$.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (5.2) mit Hilfe der Charakteristiken-Methode.
- Ermitteln Sie einen geeigneten Messort z_m der die vollständige Rekonstruktion des Anfangszustandes $x_0(z)$, $z \in [0, L]$, aus der Messinformation $y(t)$ ermöglicht. Welche Mindestmesszeit T_m ist hierzu erforderlich? Verdeutlichen Sie sowohl z_m als auch T_m graphisch in der (z, t) -Ebene der Charakteristiken.
- Bestimmen Sie $x_0(z)$ aus $y(t) = 2 + \sin(2\pi t)$ für $v = 1/2$, $L = 2$ und $\mu \in \{-2, 2\}$ und illustrieren Sie $x_0(z)$ jeweils graphisch.

Neben der Messung an einer statischen Position z_m kann alternativ ein mitbewegter Sensor (floating sensor) mit $z_m = z_m(t)$ verwendet werden.

- Bestimmen Sie eine geeignete Trajektorie bzw. eine Trajektorienschar $z_m(t)$ für den mitbewegten Sensor zur vollständigen Rekonstruktion von $x_0(z)$, $z \in [0, L]$, aus $y(t)$ innerhalb des Zeitintervalls $t \in [0, T_m^f]$ mit $T_m^f = T_m/2$. Welche Kausalitätsbedingung muss dabei jeder Pfad $z_m(t)$ erfüllen? Illustrieren Sie den Effekt des mitbewegten Sensors graphisch in der (z, t) -Ebene der charakteristischen Richtungen.

Übung 6

Stabilität und Stabilisierung

6.1 Stabilitätsanalyse nach Lyapunov für ein Diffusions–Konvektions–Reaktionssystem

Zur Analyse der Stabilität des linearen Diffusions–Konvektions–Reaktionssystems

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} - b x(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (6.1a)$$

mit den Rand– und Anfangsbedingungen

$$x(0, t) = x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (6.1b)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (6.1c)$$

soll im Weiteren das Lyapunovfunktional

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2\gamma z} x^2(z, t) dz$$

herangezogen werden.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \geq \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 x^2(z, t) dz$$

falls $x(0, t) = 0$ und/oder $x(1, t) = 0$. Weisen Sie zudem nach, dass diese Abschätzung im Fall $x(0, t) = x(1, t) = 0$ zu

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \geq \pi^2 \int_0^1 x^2(z, t) dz$$

verbessert werden kann. Diese Ungleichungen stellen Abwandlungen der Poincaré Ungleichung dar mit der im Allgemeinen deutlich genauere Abschätzungen möglich sind.

b) Bestimmen Sie den maximalen Parameterbereich (a, b) für den (6.1) exponentiell stabil ist. Nutzen Sie hierzu die in a) bestimmten Ungleichungen und ermitteln Sie einen geeigneten Parameter γ .

6.2 Asymptotische Stabilisierung einer linearen Wellengleichung

Im Folgenden soll die Stabilisierung einer schwingenden Saite analysiert werden. Die Bewegungsgleichung für die longitudinale Auslenkung gehorcht dabei der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (6.2a)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (6.2b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = -u(t), \quad t > 0 \quad (6.2c)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (6.2d)$$

Die Eingangsgröße $u(t)$ entspricht dabei einer am Rand $z = 1$ wirkenden Kraft. Für die weitere Analyse wird für $u(t)$ ein so genannter strikt-positiv-reeller Regler in Form einer dynamischen Rückführung des Ausgangs $y(t) = \frac{\partial x}{\partial t}(1, t)$ angesetzt, d.h.

$$\frac{d\zeta}{dt} = A_\zeta \zeta + b_\zeta y(t) \quad (6.3a)$$

$$u(t) = c_\zeta^T \zeta + d_\zeta y(t). \quad (6.3b)$$

Hierbei gilt, dass $A_\zeta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Hurwitz-Matrix ist, (A_ζ, b_ζ) steuerbar und (c_ζ, A_ζ) beobachtbar sind und für $d_\zeta \geq 0$ eine Konstante γ mit $d_\zeta \geq \gamma \geq 0$ existiert, so dass $d_\zeta + \Re\{c_\zeta^T(i\omega I - A_\zeta)^{-1}b_\zeta\} > \gamma$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$ (falls $d_\zeta > 0$ wird auch $\gamma > 0$ angenommen). Mit diesen Annahmen wird die Übertragungsfunktion $G_\zeta = c_\zeta^T(sI - A_\zeta)^{-1}b_\zeta + d_\zeta$ auch als strikt-positiv-reelle Übertragungsfunktion bezeichnet. Zudem impliziert das Kalman-Yakubovich-Popov Lemma, dass somit symmetrische positiv definite Matrizen $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ein Vektor $q \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $\epsilon > 0$ existieren, so dass

$$A_\zeta^T P + P A_\zeta = -qq^T - \epsilon Q$$

$$P b_\zeta - c_\zeta = \sqrt{2(d_\zeta - \gamma)} q.$$

- a) Überführen Sie das System bestehend aus (6.2) und (6.3) in eine geeignete Operatorformulierung mit den Zustandsgrößen $x_1(t) = x(\cdot, t)$, $x_2(t) = \frac{\partial x}{\partial t}(\cdot, t)$ und $x_3(t) = \zeta(t)$ im Zustandsraum $X = H^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1) \oplus \mathbb{R}^n$ mit innerem Produkt

$$\langle \phi, \psi \rangle_X = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d\phi_1}{dz}, \frac{d\psi_1}{dz} \right\rangle_{L^2} + \frac{1}{2} \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_{L^2} + \frac{1}{2} \psi_3^T P \phi_3$$

und der entsprechenden induzierten Norm $\|\phi\|_X = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_X}$. Gegen Sie hierbei den Systemoperator A und dessen Definitionsbereich $D(A)$ an.

- b) Zeigen Sie, dass A einen dissipativen Operator darstellt und verwenden Sie das Lumer-Phillips Theorem zum Nachweis, dass A der infinitesimale Generator einer C_0 -Halbgruppe $T(t)$ von Kontraktionen ist.
- c) Zeigen Sie unter Verwendung des Invarianzprinzips von LaSalle, dass $T(t)$ asymptotisch stabil ist.

6.3 Exponentielle Stabilisierung einer linearen Wellengleichung

Zeigen Sie, dass der in Aufgabe 6.2 eingeführte strikt-positiv-reelle Regler unter den dort getroffenen Voraussetzungen die lineare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (6.4a)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (6.4b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = -u(t), \quad t > 0 \quad (6.4c)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z), \quad z \in [0, 1] \quad (6.4d)$$

exponentiell stabilisiert. Verwenden Sie hierzu den Frequenzbereichstest aus dem Vorlesungsskript.

6.4 Backstepping-basierter Beobachterentwurf für ein Diffusions-Reaktionssystem

Im Folgenden soll für das Diffusions-Reaktionssystem

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \lambda x(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (6.5a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (6.5b)$$

$$x(1, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (6.5c)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (6.5d)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und der Ausgangsgröße

$$y(t) = x(0, t), \quad t \geq 0 \quad (6.5e)$$

ein verteilt-parametrischer Luenberger-Beobachter entworfen werden. Für $\lambda \gg 1$ ist (6.5) instabil. Der Beobachter wird dabei in einer Simulator-Korrektor Struktur

$$\frac{\partial \hat{x}(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \hat{x}(z, t)}{\partial z^2} + \lambda \hat{x}(z, t) + p_1(z)(y(t) - \hat{x}(0, t)), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial z}(0, t) = p_0(y(t) - \hat{x}(0, t)), \quad t > 0 \quad (6.6b)$$

$$\hat{x}(1, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (6.6c)$$

$$\hat{x}(z, 0) = \hat{x}_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (6.6d)$$

angesetzt. Dabei sollen p_0 und $p_1(z)$ so bestimmt werden, dass die Beobachterfehlerdynamik exponentiell stabil ist.

- Gegen Sie das verteilt-parametrische System der Beobachterfehlerdynamik im Zustand $\tilde{x}(z, t) = x(z, t) - \hat{x}(z, t)$ an.
- Verwenden Sie die (invertierbare) Transformation

$$\tilde{x}(z, t) = w(z, t) - \int_0^z p(z, \xi) w(\xi, t) d\xi$$

um das Beobachterfehlersystem in das exponentiell stabile Diffusions-Reaktionssystem

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} - \mu w(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (6.7a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (6.7b)$$

$$w(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (6.7c)$$

$$w(z, 0) = w_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (6.7d)$$

mit $\mu \geq 0$ zu überführen. Bestimmen Sie hierzu die partielle Differenzialgleichung des Integralkerns $p(z, \xi)$ sowie die zugehörigen Randbedingungen. Lösen Sie diese Differenzialgleichung.

- Ermitteln Sie hiermit die Korrektorterm p_0 und $p_1(z)$ mit denen die Transformation realisiert wird.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Simulieren und vergleichen Sie den so entworfenen Beobachter mit dem Streckenmodell. Nutzen Sie hierzu die MATLAB-Funktion `pdepe`.

Übung 7

Flachheit

7.1 Flachheitsbasierte Trajektorienplanung für ein Diffusions–Konvektions–Reaktionssystem

Zur Analyse der Stabilität des linearen Diffusions–Konvektions–Reaktionssystems

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} - b x(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (7.1a)$$

mit den Rand– und Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = c(x(1, t) - u(t)), \quad t > 0 \quad (7.1b)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (7.1c)$$

soll eine Trajektorienfolge im offenen Regelkreis entworfen werden. Dabei wird das Ziel verfolgt, einen Arbeitspunktwechsel ausgehend vom stationären Anfangsprofil $x_0(z)$ innerhalb des vorgegebenen Zeitintervalls $t \in [0, T]$ mit $T > 0$ zu realisieren.

- a) Überführen Sie das System (7.1) mittels der invertierbaren Transformation

$$x(z, t) \mapsto \hat{x}(z, t) e^{-az} \quad (7.2)$$

in eine Diffusions–Reaktionsgleichung.

- b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Ansatzes

$$x(z, t) \rightarrow \hat{x}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}_n(t) \frac{z^n}{n!}$$

einen flachen Ausgang $y(t)$ für das transformierte System der eine Parametrierung der Zustandsgröße und der Eingangsgröße ermöglicht. Geben Sie dazu die Rekursionsvorschrift zur Berechnung der Reihenkoeffizienten $\hat{x}_n(t)$ in Abhängigkeit von $y(t)$ und dessen Zeitableitungen sowie die schematische Parametrierung von $u(t)$ an.

- c) Sei $y(t)$ eine Gevrey–Funktion der Ordnung $\alpha \leq 2$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass dann jeder parametrisierte Reihenkoeffizient eine Abschätzung der Form

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_0^+} \left| \frac{d^l \hat{x}_n(t)}{dt^l} \right| \leq \frac{M \epsilon^n ((l+n)!)^\alpha}{R^l (n!)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad l, n \geq 0$$

erfüllt. Bestimmen Sie daraus den Konvergenzradius der parametrisierten Potenzreihe (7.2).

- d) Formulieren Sie die Bedingungen, die jede Solltrajektorie $y^*(t)$ für den flachen Ausgang $y(t)$ zur Lösung des obigen Trajektorienfolgeproblems erfüllen muss.

7.2 Flachheitsbasierte Trajektorienplanung für einen piezoelektrischen Stapelaktor

Im Folgenden soll die Trajektorienplanungsaufgabe für einen piezoelektrischen Stapelaktor analysiert werden. Gemäss den Ausführungen in Aufgabe 2.1 gehorcht dieser der Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, L), \quad t > 0 \quad (7.3a)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(0, t) = a_0 \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) + a_1 (x(L, t) - x(0, t)) - a_2 x(0, t) + u(t), \quad t > 0 \quad (7.3b)$$

$$m_1 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(L, t) = -a_0 \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) - a_1 (x(L, t) - x(0, t)) - u(t), \quad t > 0 \quad (7.3c)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z), \quad z \in [0, 1], \quad (7.3d)$$

wobei $x(z, t)$ die longitudinale Auslenkung des Aktors beschreibt. Die Parameter ergeben sich dabei zu $c^2 = Y/\rho$, $a_0 = AY$, $a_1 = k_F$ und $a_2 = k_G$ (vgl. Aufgabe 2.1). Die Regelgröße ist durch die Auslenkung des Aktors an der Spitze, d.h.

$$w(t) = x(L, t) \quad (7.3e)$$

gegeben, die durch eine geeignete Eingangstrajektorie $u(t) = u^*(t)$ entlang einer vorgegebenen Solltrajektorie $w^*(t)$ geführt werden soll.

- Transformieren Sie (7.3) in den Bildbereich der Laplace-Transformation. Nehmen Sie hierzu an, dass $x_0(z) = x_1(z) = 0$, was für stationäre Anfangsbedingungen durch eine einfache Zustandstransformation erreicht werden kann.
- Ermitteln Sie hiermit einen flachen Ausgang der eine Parametrierung des Zustands und des Eingangs ermöglicht. Geben Sie die Parametrierung sowohl im Bildbereich der Laplace-Transformation als auch im Zeitbereich an.
- Diskutieren Sie das Ergebnis der Parametrierung im Bezug zu den dynamischen Eigenschaften von (7.3) und analysieren Sie die physikalische Interpretierbarkeit des ermittelten flachen Ausgangs.

7.3 Flachheitsbasierte Trajektorienplanung für einen Brückenkran mit schweren Ketten

Das in Abbildung 7.1 dargestellte System besteht aus einem auf einer Schiene verfahrbaren Wagen der Masse m , zwei identischen Ketten der Länge L und der Linienmasse ρ sowie einer an den Ketten angebrachten Last M . Als Eingangsgröße dient die am Wagen angreifende Kraft F (Thull u. a., 2005).

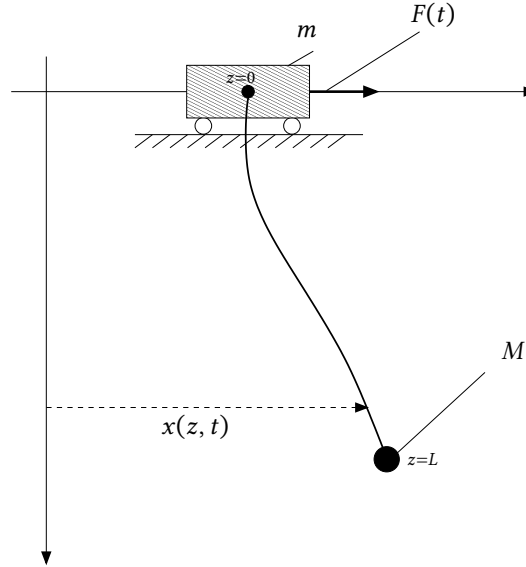


Abb. 7.1: Schema des Brückenkrans mit schweren Ketten.

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen ergeben sich die Bewegungsgleichungen für die horizontale Auslenkung $x(z, t)$ der beiden Ketten zu

$$\rho \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(P(z) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right), \quad z \in (0, L), \quad t > 0 \quad (7.4a)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(0, t) - 2P(0) \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = F(t), \quad t > 0 \quad (7.4b)$$

$$M \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(L, t) + 2P(L) \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.4c)$$

$$x(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = 0, \quad z \in [0, 1]. \quad (7.4d)$$

Hier stellt $P(z) = g[\rho(L-z) + M/2]$ die in den Ketten wirkende Kraft an der Stelle z dar. Dabei wurde berücksichtigt, dass sich die Masse der Last auf zwei Ketten symmetrisch verteilt.

Das im Folgenden zu untersuchende Trajektorienfolgeproblem betrifft den Entwurf einer Steuerung $F^*(t)$ so, dass die Position der Last $w(t) = x(L, t)$ einer vorgegebenen Solltrajektorie $w^*(t)$ folgt.

- Transformieren Sie (7.4) in den Bildbereich der Laplace-Transformation.
- Zeigen Sie, dass $y(t) = x(L, t)$ einen flachen Ausgang für das System darstellt und bestimmen Sie die Zustands- und Eingangsparametrierung sowohl im Bild- als auch im Zeitbereich. Diskutieren Sie zudem die erhaltene Steuerung im Bezug zu den dynamischen Eigenschaften des Systems.
- Implementieren Sie die Zustands- und Eingangsparametrierung in MATLAB oder OCTAVE. Wählen Sie eine geeignete Solltrajektorie $w^*(t)$ für den flachen Ausgang und stellen Sie erhaltenen Ergebnisse für das Sollprofil $x^*(z, t)$ und die Steuerung $u^*(t)$ graphisch dar.

Literatur

Thull, D., D. Wild und A. Kugi (2005). „Infini-dimensional regulation of a crane with heavy chains“. In: *at-Automatisierungstechnik* 53.8, S. 400–410 (siehe S. 33).