

---

# REGELUNG VERTEILT- PARAMETRISCHER SYSTEME

im Sommersemester 2024

---

Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer  
Karlsruher Institut für Technologie



## **REGELUNG VERTEILT-PARAMETRISCHER SYSTEME**

im Sommersemester 2024

Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer

Karlsruher Institut für Technologie

Digital Process Engineering Group

Institut für Mechanische Verfahrenstechnik und Mechanik

Hertzstr. 16, Geb. 06.40

D-76187 Karlsruhe

✉ [thomas.meurer@kit.edu](mailto:thomas.meurer@kit.edu)

🌐 <http://www.mvm.kit.edu/dpe.php>

© Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Regelstrecken mit verteilten Parametern</b>	<b>1</b>
1.1	Mathematische Beschreibung von verteilt-parametrischen Systemen . . . . .	1
1.1.1	Übergang von diskret zu kontinuierlich verteilten Parametern am Beispiel eines Mehrmassenschwingers . . . . .	1
1.1.2	Elektrische Leitungssysteme . . . . .	3
1.1.3	Wärmeleitung und Diffusion . . . . .	4
1.1.4	Diffusions-Konvektions-Reaktions-Systeme . . . . .	6
1.1.5	Flexible mechanische Strukturen . . . . .	7
1.2	Klassifikation von PDgln 2. Ordnung und das Charakteristikenverfahren . . . . .	11
1.2.1	Semilineare PDgln. in 2 Koordinaten $z$ und $t$ . . . . .	11
1.2.2	Typen partieller Differenzialgleichungen . . . . .	15
1.3	Grundprinzipien des Regelungs- und Beobachterentwurfs für SVPn . . . . .	17
1.3.1	”Early lumping” und ”Late lumping” Entwurf . . . . .	17
1.3.2	Regelkreisstruktur mit zwei Freiheitsgraden zur Trajektorienfolgeregelung . . . . .	18
1.3.3	Stell- und Messgrößen . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Analyse und Synthese im Frequenzbereich</b>	<b>25</b>
2.1	Einführung in die Analyse im Frequenzbereich . . . . .	25
2.2	Regelungsentwurf mittels Ausgangsrückführung . . . . .	31
2.3	Eingangs-Ausgangs-Stabilität verteilt-parametrischer SISO Systeme . . . . .	31
2.3.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	31
2.3.2	Eingangs-Ausgangs-Stabilität des offenen Regelkreises . . . . .	34
2.3.3	Eingangs-Ausgangs-Stabilität des geschlossenen Regelkreises . . . . .	38
2.4	Algebraische Verallgemeinerungen . . . . .	45
2.4.1	Die Callier-Desoer Klasse . . . . .	45
2.4.2	Teilerfremde Faktorisierungen . . . . .	47
2.4.3	Eingangs-Ausgangs-Stabilität verteilt-parametrischer MIMO Systeme . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Analyse und Synthese im Zustandsraum</b>	<b>51</b>
3.1	Einführung in die Analyse im Zustandsraum . . . . .	51
3.1.1	Motivation und einleitende Beispiele . . . . .	52
3.1.2	Gleichmäßig stetige Halbgruppen und infinitesimale Generatoren . . . . .	61
3.1.3	Rieszsche Operatoren . . . . .	63
3.2	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . . .	70
3.2.1	Steuerbarkeitsbegriffe für lineare SVP . . . . .	70
3.2.2	Beobachtbarkeitsbegriffe für lineare SVP . . . . .	72

3.2.3	Nachweis approximativer Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit . . . . .	74
3.3	Einführung in die Stabilitätstheorie von SVPn . . . . .	85
3.3.1	Stabilität von $C_0$ -Halbgruppen . . . . .	85
3.3.2	Exponentielle Stabilität und die „spectrum determined growth assumption“ . . . . .	88
3.3.3	Stabilität nach Lyapunov . . . . .	92
3.4	Regelungsentwurf mittels Zustandsrückführung . . . . .	103
3.4.1	Backstepping-basierte Zustandsrückführung . . . . .	103
3.4.2	Zustandsregelung auf Basis reduzierter Modelle . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Flachheitsbasierte Methoden</b> . . . . .	<b>117</b>
4.1	Flachheit endlich-dimensionaler nichtlinearer Systeme . . . . .	117
4.2	Flachheit parabolischer SVPn . . . . .	119
4.2.1	Trajektorienplanung für die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	119
4.2.2	Trajektorienplanung für ein nichtlineares Diffusions-Reaktionssystem . . . . .	125
4.3	Flachheit hyperbolischer SVPn . . . . .	129
4.3.1	Trajektorienplanung für die lineare Transportgleichung . . . . .	130
4.3.2	Trajektorienplanung für die quasilineare Burger-Gleichung . . . . .	132
4.3.3	Trajektorienplanung für die lineare Wellengleichung . . . . .	132
4.4	Flachheit biharmonischer SVPn . . . . .	135
4.4.1	Flacher Ausgang und Zustands- und Eingangsparametrierung . . . . .	136
4.4.2	Rücktransformation durch Reihenentwicklung . . . . .	136
4.4.3	Trajektorienplanung für die Regelgröße . . . . .	137
4.5	Verallgemeinerung flachheitsbasierter Methoden . . . . .	137
4.6	Folgeregelung mittels des Zwei-Freiheitsgradentwurfs . . . . .	138
4.6.1	Trajektorienfolgeregelung für eine lineare Wärmeleitungsgleichung . . . . .	138
4.6.2	Trajektorienfolgeregelung für ein nichtlineares Diffusions-Reaktionssystem . . . . .	139
<b>A</b>	<b>Eigenschaften und Korrespondenzen der Laplace-Transformation</b> . . . . .	<b>A1</b>
<b>B</b>	<b>Grundlagen der Funktionalanalysis und Operatortheorie</b> . . . . .	<b>B5</b>
B.1	Grundbegriffe . . . . .	B5
B.1.1	Lebesgue quadratisch integrierbaren Funktionen . . . . .	B5
B.1.2	Direkte Summe . . . . .	B5
B.1.3	Abgeschlossener Operator . . . . .	B5
B.1.4	Dichte Teilmenge und Abschluss . . . . .	B5
B.1.5	Operatornorm . . . . .	B5
B.2	Das Hille-Yoshida Theorem . . . . .	B6
B.3	Das Lumer-Phillips Theorem . . . . .	B6
B.4	Lösung der Zustandsgleichungen . . . . .	B7
B.4.1	Rieszsche Operatoren . . . . .	B7
B.4.2	Nicht-Rieszsche Operatoren . . . . .	B8
<b>C</b>	<b>Numerische Lösungsverfahren</b> . . . . .	<b>C11</b>
C.1	Numerische Lösung von parabolischen PDgln. . . . .	C11
C.2	Numerische Lösung von hyperbolischen PDgln. . . . .	C14

# Kapitel 1

## Regelstrecken mit verteilten Parametern

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über einige Formen partieller Differentialgleichungen (PDgln.) gegeben werden, denen man bei der Beschreibung technischer Systeme begegnet. Dies umfasst neben der mathematischen Beschreibung auch die einführende Analyse und Klassifikation der Systeme mit verteilten Parametern (SVP) im Hinblick auf deren analytischer und numerischer Lösung sowie der Untersuchung systemtheoretischer bzw. regelungstechnischer Fragestellungen.

### 1.1 Mathematische Beschreibung von verteilt-parametrischen Systemen

Die folgenden Beispiele sollen eine erste Einführung in die mathematische Beschreibung von SVPn darstellen. Hierzu soll einerseits auf Unterschiede bzw. Zusammenhänge zu der Beschreibung konzentriert-parametrischer Systeme (SKP) eingegangen werden und andererseits ein erster Einblick in die aus Sicht der Regelungstechnik wichtigen Systemstrukturen gewonnen werden.

#### 1.1.1 Übergang von diskret zu kontinuierlich verteilten Parametern am Beispiel eines Mehrmassenschwingers

Anhand zweier Konfigurationen von Mehrmassenschwingern werden im Folgenden die Unterschiede zwischen einem System mit konzentrierten Parametern und einem System mit verteilten Parametern motiviert.

##### Konzentriert bzw. diskret verteilte Parameter $\{m, c, F_j(t), x_j(t)\}$

In dem in Abbildung 1.1 dargestellten  $n$ -Massenschwinger stellt  $x_j(t)$  die Auslenkung der  $j$ -ten Masse  $m$  und  $F_j(t)$  die an dieser Masse angreifende externe Kraft dar. Die einzelnen Massenelemente sind durch Federn mit

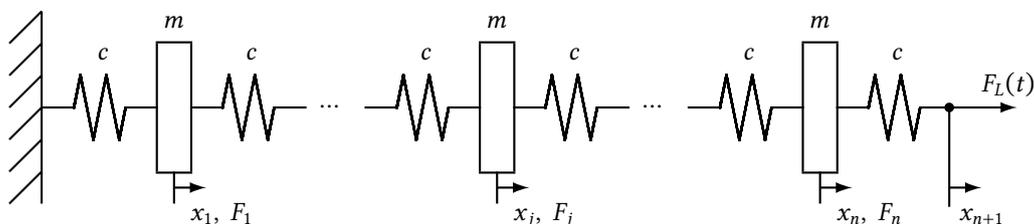


Abb. 1.1: Mehrmassenschwinger mit diskret verteilten Parametern.

der Federsteifigkeit  $c$  verbunden. Die Kraft  $F_L(t)$  bezeichnet die am Ende des Mehrmassenschwingers wirkende externe Kraft. Die kinematische Analyse und die Anwendung des 2. Newtonschen Gesetzes führen unmittelbar auf die **Bewegungsgleichungen** des Systems in der Form von

- $n$  Differenzialgleichungen 2. Ordnung

$$m \frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = -c[-x_{j+1}(t) + 2x_j(t) - x_{j-1}(t)] + F_j(t)$$

- $2n$  Anfangsbedingungen (ABn)

$$x_j(0) = x_{j,0}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{dx_j}{dt}(0) = x_{j,1}$$

- 2 Randbedingungen (RBn)

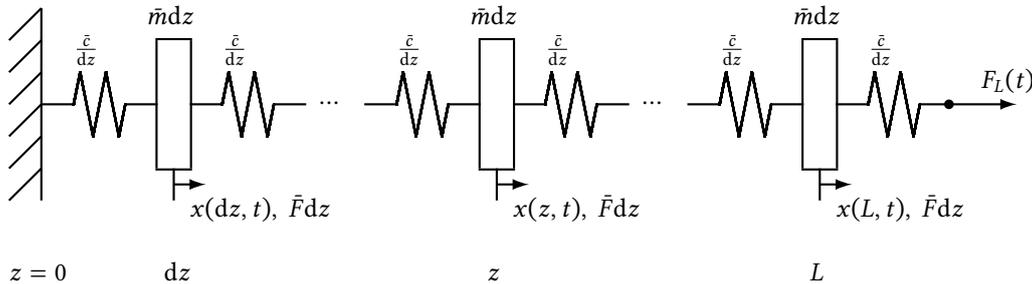
$$j = 0 : \quad x_0 = 0$$

$$j = n + 1 : \quad F_L(t) + c(x_n(t) - x_{n+1}(t)) = 0$$

Offensichtlich ergibt sich eine Beschreibung in Form von  $n$  Differenzialgleichungen (Dgln.) 2. Ordnung bzw.  $2n$  Dgln. 1. Ordnung. Die **Systemordnung entspricht somit  $2n$** , weshalb der betrachtete Mehrmassenschwinger auch als ein **System mit konzentrierten Parametern der Ordnung  $2n$**  bezeichnet wird.

### Kontinuierlich verteilte Parameter $\{\bar{m}dz, \bar{c}/dz, \bar{F}dz, x(z, t)\}$

Abweichend von dem betrachteten  $n$ -Massenschwinger mit konzentrierten Parametern wird im Folgenden gemäß Abbildung 1.2 angenommen, dass der Mehrmassenschwinger aus **infinitesimal kleinen Massen** mit dem so genannten Massenbelag  $\bar{m}$  besteht, wobei die einzelnen Massen durch infinitesimal kleine Federn der Federsteifigkeit  $\bar{c}/dz$  verbunden sind. An jeder Masse wirkt die Streckenlast  $\bar{F}$  wobei zusätzlich die externe Kraft



**Abb. 1.2:** Mehrmassenschwinger mit kontinuierlich verteilten Parametern.

$F_L(t)$  am Ende der Schwingerkette eingepreßt wird. Die Anwendung des 2. Newtonschen Gesetzes auf das an der Stelle  $z$  befindliche infinitesimale Massenelement führt auf:

- 1 partielle Differenzialgleichung 2.Ordnung mit  $z \in (0, L), t > 0$

$$\bar{m}dz \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = -\frac{\bar{c}}{dz} [x(z, t) - x(z - dz, t) + x(z, t) - x(z + dz, t)] + \bar{F}dz$$

bzw.

$$\bar{m} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \bar{c} \lim_{dz \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x(z + dz, t) - 2x(z, t) + x(z - dz, t)}{dz^2}}_{= \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \text{ für } dz \rightarrow 0} + \bar{F}$$

- 2 Anfangsbedingungen

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, L]$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z),$$

wobei sich wegen der kontinuierlichen unabhängigen Koordinate  $z \in \mathbb{R}$  die **Ordnung des SVP zu  $\infty$**  ergibt.

- 2 Randbedingungen

Hierbei werden bei SVPn abhängig von der Konfiguration verschiedene Typen von RBN unterschieden, die nachfolgend anhand des betrachteten Beispiels aufgeführt sind

- **Vorgabe Funktionswert (Dirichlet-Randbedingung)**

$$x(L, t) = 0$$

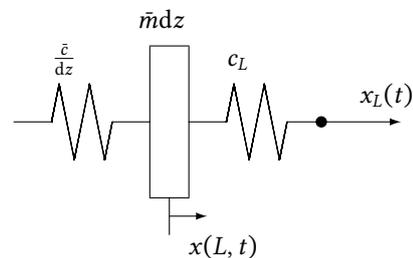
- **Vorgabe der Steigung (Neumann-Randbedingung)**

$$\lim_{dz \rightarrow 0} -\frac{\bar{c}}{dz} [x(L, t) - x(L + dz, t)] = \bar{c} \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = F_L(t)$$

- **Gemischte Randbedingung**

$$c_L [x_L(t) - x(L, t)] = \bar{c} \frac{\partial x}{\partial z}(L, t)$$

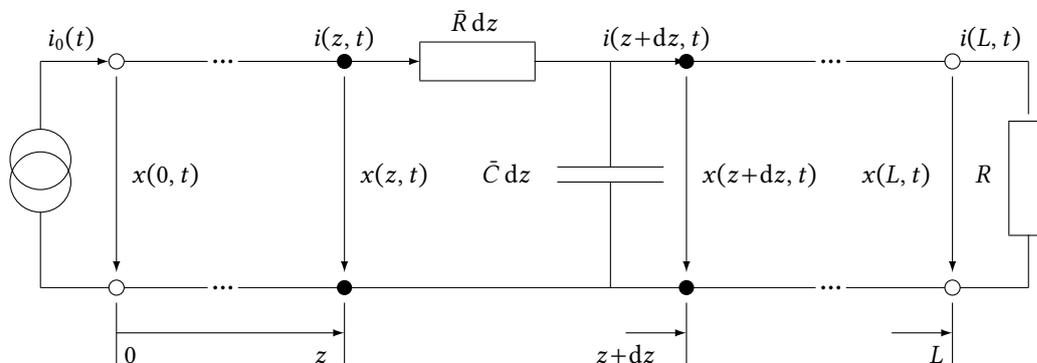
aus Kräfte-GGW für



Im Unterschied zum  $n$ -Massenschwinger führt die Betrachtung des aus infinitesimalen Massenelementen aufgebauten Schwingers zu einer Beschreibung in Form einer partiellen Differentialgleichung. Diese wird, wie anhand der Analyse in Kapitel 1.2 deutlich gemacht wird, auch als so genannte Wellengleichung bezeichnet. Insbesondere ist zu betonen, dass sich die Systemordnung aufgrund der kontinuierlich verteilten örtlichen Koordinate  $z \in \mathbb{R}$  zu  $\infty$  ergibt, weshalb ein System mit verteilten Parametern auch als **infini-dimensional System** bezeichnet wird.

## 1.1.2 Elektrische Leitungssysteme

In die in Abbildung 1.3 dargestellte homogene RC-Leitung wird der Strom  $i_0(t)$  eingespeist. Das Ende des Leiters ist mit einem Ohmschen Widerstand  $R$  abgeschlossen. Zur Zeit  $t = 0$  sei der Leiter ladungsfrei.



**Abb. 1.3:** Differenzielles RC-Leitungselement.

Durch Anwendung der **Kirchhoffschen Regeln** auf das dargestellte differenzielle Leitungselement können analog zur dem im vorangegangenen Abschnitt betrachteten mechanischen Mehrmassenschwinger die partiellen Differentialgleichungen für den Strom  $i(z, t)$  und die Spannung  $x(z, t)$  bestimmt werden.

Aus der Knotenregel folgt

$$\underbrace{i(z, t) - i(z + dz, t)}_{= -\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} dz + O^2(dz)} - \bar{C} dz \frac{\partial x(z + dz, t)}{\partial t} = 0$$

während die Maschenregel

$$\bar{R} dz i(z, t) + \underbrace{x(z + dz, t) - x(z, t)}_{= \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz + O^2(dz)} = 0$$

liefert. Nach Division mit  $dz$  und anschließender Auswertung des Grenzwertes für  $dz \rightarrow 0$  ergibt sich somit das folgende System von PDgln. 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{\bar{C}} \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} &= 0, & z \in (0, L), t > 0 \\ \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} + \bar{R} i(z, t) &= 0, & z \in (0, L), t > 0 \end{aligned}$$

für den Strom  $i(z, t)$  und die Spannung  $x(z, t)$ . Aus der Annahme der Ladungsfreiheit zum Zeitpunkt  $t = 0$  ergibt sich die AB  $x(z, 0) = 0$ . Die Randbedingungen können aus dem eingespeisten Strom an  $z = 0$ , d.h.  $i(0, t) = i_0(t)$ , und durch die Auswertung des Ohmschen Gesetzes am Abschlusswiderstand, d.h.  $x(L, t) = Ri(L, t)$ , bestimmt werden.

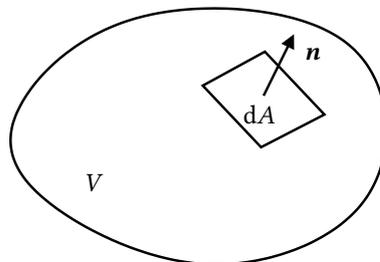
Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich das System von PDgln. für  $i(z, t)$  und  $x(z, t)$  durch Elimination von  $i(z, t)$  in eine PDgl. 2. Ordnung in der Spannung

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} - \frac{1}{\bar{R}\bar{C}} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad z \in (0, L), t > 0$$

überführen lässt (die RBN ergeben sich entsprechend). Interessanterweise ist diese Gleichung identisch zur **Wärmeleitungsgleichung**, die im folgenden Abschnitt hergeleitet wird.

### 1.1.3 Wärmeleitung und Diffusion

Eines der klassischen Beispiele zur Analyse von Regelentwurfsverfahren für SVPn stellt die **Wärmeleitungs- bzw. Diffusionsgleichung** dar. Diese wird im Folgenden in allgemeiner Form zur Bestimmung der Temperaturverteilung in einem einfach zusammenhängenden drei-dimensionalen Gebiet hergeleitet. Hierzu wird der in Abbildung 1.4 gezeigte wärmeleitende Körper mit Volumen  $V$  betrachtet. Die äußere Normale in dem eingezeichneten Flächenelement  $dA$  wird mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet. Um das Wärmeleitungsproblem zu lösen, ist es notwendig, die Temperaturverteilung bzw. das Temperaturfeld  $T(\mathbf{z}, t)$  mit  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$  in seiner räumlichen und zeitlichen Abhängigkeit zu bestimmen. Der **erste Hauptsatz der Thermodynamik** besagt, dass die zeitliche



**Abb. 1.4:** Bereich eines wärmeleitenden Körpers mit dem Volumen  $V$ . Differenzielles Oberflächenelement  $dA$  mit äußerer Normalen  $\mathbf{n}$ .

Änderung der inneren Energie  $U(\mathbf{z}, t)$  der Summe der zugeführten abzüglich der Summe der abgeführten

Wärmeströme entspricht, d.h.

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} + P \quad (1.1)$$

wobei  $\dot{Q}$  den Wärmestrom und  $P$  die (mechanische oder elektrische) Leistung bezeichnen, die dem Körper über dessen Oberfläche zugeführt werden. Für den hier betrachteten inkompressiblen Körper ergibt sich für die innere Energie

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \rho \int_V \frac{du}{dt} dV$$

mit  $u$  der spezifischen inneren Energie, die sich gemäß der (isochoren) kalorischen Zustandsgleichung zu  $du = c(T)dT$  ergibt, wobei  $c(T)$  die spezifische Wärmekapazität bezeichnet. Folglich gilt

$$\frac{dU}{dt} = \rho \int_V c(T) \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

Der zugeführte Wärmestrom  $\dot{Q}$  ergibt sich aus der Betrachtung des differentiellen Flächenelements  $dA$ . Insbesondere gilt für den in das Element hineinfließenden Wärmestrom die Beziehung  $d\dot{Q} = -\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} dA$  mit der Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}$ . Es ist hierbei zu beachten, dass ein Wärmestrom dann positiv gezählt wird, wenn er in den Bereich hineinströmt. In diesem Fall weist der Vektor  $\dot{\mathbf{q}}$  in das Innere des Körpers wobei der zugehörige Normalenvektor  $\mathbf{n}$  nach außen zeigt, weshalb  $\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} \leq 0$ . Zusammen mit dem negativen Vorzeichen ergibt sich somit, dass dann  $d\dot{Q} > 0$ . Der gesamte Wärmestrom  $\dot{Q}$  kann durch Integration aller differentiellen Wärmeströme  $d\dot{Q}$  bestimmt werden, d.h.

$$\dot{Q} = - \int_A \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_V \text{div} \dot{\mathbf{q}} dV.$$

Hierbei wurde für die zweite Identität der Gaußsche Integralsatz verwendet. Die dem Körper zugeführte Leistung  $P$  setzt sich aus einem Anteil  $P_V$  zusammen, der eine Volumenänderung bewirkt, sowie einem Anteil der im Inneren des Bereichs dissipierten Leistung  $P_{\text{diss}}$ . Für den hier betrachteten inkompressiblen Körper gilt  $P_V = 0$ . Zur dissipierten Leistung  $P_{\text{diss}}$  zählt beispielsweise die so genannte Joulesche Wärme die in elektrisch leitfähigen Medien aufgrund deren elektrischen Widerstandes dissipiert wird. Gemäß Baehr und Stephan, 1996 wird für diese irreversiblen Energieumwandlungen im Innern des Körpers der folgende Ansatz verfolgt

$$P = P_{\text{diss}} = \int_V \dot{W}(T, \mathbf{z}, t) dV,$$

wobei  $\dot{W}(T, \mathbf{z}, t)$  die so genannte Leistungsdichte beschreibt. Einsetzen dieser Ergebnisse in die Energiebilanz (1.1) liefert somit, dass notwendigerweise

$$\int_V \left( \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \dot{\mathbf{q}} - \dot{W}(T, \mathbf{z}, t) \right) dV = 0$$

Für beliebige Bilanzräume  $V$  verschwindet dieses Volumenintegral nur, wenn

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \dot{\mathbf{q}} + \dot{W}(T, \mathbf{z}, t).$$

Mit dem **Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung** Baehr und Stephan, 1996, d.h.

$$\dot{\mathbf{q}} = -\lambda(T) \text{grad} T,$$

mit  $\lambda(T)$  der Wärmeleitfähigkeit, ergibt sich schließlich die bekannte Form der Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c(T(\mathbf{z}, t)) \frac{\partial T(\mathbf{z}, t)}{\partial t} = \text{div} [\lambda(T(\mathbf{z}, t)) \text{grad} T(\mathbf{z}, t)] + \dot{W}(T(\mathbf{z}, t), \mathbf{z}, t). \quad (1.2)$$

Im örtlich 1-dimensionalen Fall mit  $\mathbf{z} = z$  und konstanten Parametern vereinfacht sich (1.2) zu

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\dot{W}(T(z, t), z, t)}{\rho c}. \quad (1.3)$$

Zur vollständigen Festlegung des Temperaturfeldes  $T(z, t)$  sind neben einer Anfangsbedingung

$$T(z, 0) = T_0(z), \quad z \in V \quad (1.4)$$

noch Randbedingungen notwendig. Diese können wie schon bereits im Abschnitt 1.1.1 beschrieben im Wesentlichen in

- **Dirichlet**-Randbedingungen  $T(z, t) = T_\Sigma(z, t)$ ,  $z \in \Sigma \subseteq \partial\Omega$ ,
- **Neumann**-Randbedingungen  $-\lambda(T(z, t))\text{grad}T(z, t) = \dot{q}_\Sigma(z, t)$ ,  $z \in \Sigma \subseteq \partial\Omega$ , oder
- **gemischte** Randbedingungen  $-\lambda(T(z, t))\text{grad}T(z, t) = \alpha [T_\Sigma(z, t) - T(z, t)]$ ,  $z \in \Sigma \subseteq \partial\Omega$

unterteilt werden. Letztere beschreibt beispielsweise die Berührung des Körpers mit einem anderen Medium der Temperatur  $T_\Sigma(z, t)$ . Für detaillierte Herleitungsschritte, Parameterwerte und weitere (physikalische) Analyse-schritte sei auf Baehr und Stephan, 1996 verwiesen.

### 1.1.4 Diffusions-Konvektions-Reaktions-Systeme

Festbettreaktoren stellen in der chemischen Industrie den wichtigsten und meist verbreiteten Reaktortyp dar. Typischerweise werden entsprechend der untenstehenden Abbildung die mit Katalysatorkörnern gefüllten Rohre vom Reaktionsgas durchströmt. Die eigentliche Reaktion findet dabei nicht in der homogenen Gasphase statt sondern an der Oberfläche der Katalysatorkörner.

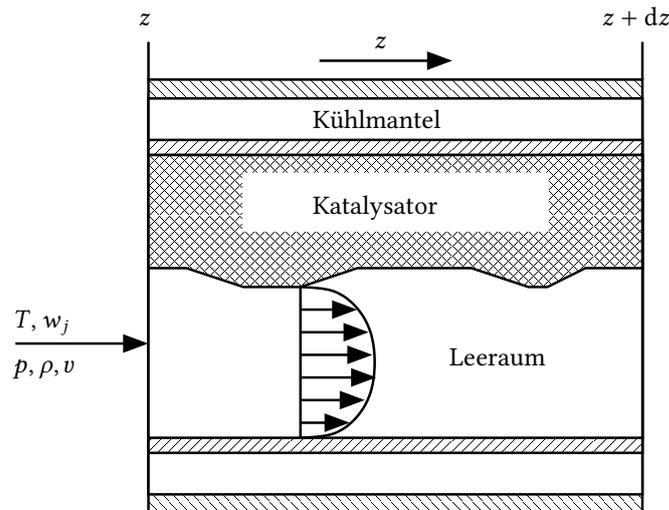


Abb. 1.5: Differenzielles Reaktorelement.

Entsprechend dem gewünschten Detaillierungsgrad können zur mathematischen Beschreibung der in den Reaktoren stattfindenden chemischen, thermischen und strömungsmechanischen Prozesse Modelle mit nahezu beliebiger Komplexität hergeleitet werden. Zur prinzipiellen Illustration der wesentlichen Effekte und zur Begriffsbestimmung werden jedoch im Folgenden nur stark vereinfachte Modellgleichungen angegeben, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \mathbf{x}(z, t)}{\partial z^2} + C \frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial z} + R(z, t, \mathbf{x}(z, t)), & z \in (0, L), \quad t > 0 \\ R_0 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(0, t) &= \mathbf{u}_0(t) - \mathbf{x}(0, t), & t > 0 \\ R_L \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(L, t) &= \mathbf{0}, & t > 0 \\ \mathbf{x}(z, 0) &= \mathbf{x}_0(z), & z \in [0, L]. \end{aligned}$$

Der Zustand  $\mathbf{x}(z, t)$  umfasst hierbei typischerweise die Konzentrationen der beteiligten Komponenten sowie die Reaktortemperatur und die Temperatur des Kühlmantels.

### 1.1.5 Flexible mechanische Strukturen

Einen prototypischen Anwendungsbereich der verteilt-parametrischen System- und Regelungstheorie stellen flexible mechanische und mechatronische Strukturen dar. Beispiele sind dabei durch flexible und faltbare Strukturen der Luft- und Raumfahrt, deformierbare Spiegel der adaptiven Optik, so genannte "smart structures" mit in die Struktur eingebetteten Aktoren und Sensoren, oder Trag- und Kranstrukturen gegeben. Im Folgenden wird eine kurze Einführung in die energiebasierte Modellierung von verteilt-parametrischen mechanischen Systemen unter Verwendung des **(erweiterten) Hamiltonschen Prinzips** gegeben (siehe z.B. Reddy, 1984; Meirovitch, 1997). Zu dessen Formulierung ist ein kurzer Exkurs in die Variationsrechnung notwendig. In allgemeiner Form liefert das (erweiterte) Hamiltonsche Prinzip die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems auf Basis der entsprechenden **kinetischen Energie**  $W_k$ , der **potenziellen Energie**  $W_p$  sowie der **virtuellen Arbeit der externen und nicht-konservativen Kräfte**  $W_{nk}$ . Das Hamiltonsche Prinzip besagt, dass aus der Menge aller zulässiger Pfade, d.h. der möglichen örtlichen und zeitlichen Verläufe der abhängigen Variablen die die **geometrischen Randbedingungen** erfüllen, für den wahren Pfad das folgende Wirkungsintegral

$$I_H = \int_{t_1}^{t_2} [W_k - W_p + W_{nk}] dt$$

für beliebige  $t_1 < t_2$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  extremal wird. Hierbei stellt der Term  $L = W_k - W_p$  die so genannte Lagrangesche Funktion dar. Eine alternative und für die eigentliche Berechnung direkt zugängliche Formulierung ergibt sich aus der **Variationsrechnung**. Die Bewegungsgleichungen des Systems ergeben sich genau dann, wenn die Variation der obigen Integralgleichung identisch Null wird für alle Variationen in den abhängigen Variablen  $x_j(z, t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  die zu den beliebigen Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  verschwinden (Meirovitch, 1997), d.h. wenn

$$\delta I_H = \int_{t_1}^{t_2} [\delta W_k - \delta W_p + \delta W_{nk}] dt = 0 \quad \text{mit} \quad \delta x_j(z, t_1) = \delta x_j(z, t_2) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (1.5)$$

Der Operator  $\delta$  wird hierbei als **Variationsoperator** bezeichnet, während  $\delta x$  die Variation von  $x$  beschreibt. Des Weiteren sei bemerkt, dass (1.5) die erste Variation des Funktionals  $I_H$  beschreibt. Seien beispielsweise  $W_{nk} = 0$  und  $W_k - W_p = F(t, x)$  mit der abhängigen Variable  $x = x(t)$ , dann gilt wegen  $I_H = I_H(x)$ , dass

$$\delta I_H = \alpha \left. \frac{dI_H(x + \alpha \delta x)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \delta F dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dx} \delta x dt$$

da  $\delta x = \alpha \delta x$  nach Definition (Reddy, 1984). Die Erweiterung auf Funktionale in mehreren abhängigen Variablen erfolgt analog. Das prinzipielle Vorgehen zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für verteilt-parametrische mechanische Systeme wird anhand der Beispiele einer schwingenden Saite und eines Biegebalkens erläutert.

**Beispiel 1.1 (Schwingende Saite).** Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen der **transversalen Schwingung** der in Abbildung 1.6 gezeigten Saite mit eingespanntem Ende an  $z = 0$  und angebrachter Feder am Ende  $z = L$  bestimmt. Neben der örtlich-verteilt auf die Saite einwirkenden Kraft  $f(z, t)$ , wird angenommen, dass an der Stelle  $z = L$  eine weitere Kraft  $F(t)$  auf die Saite eingepreßt wird.

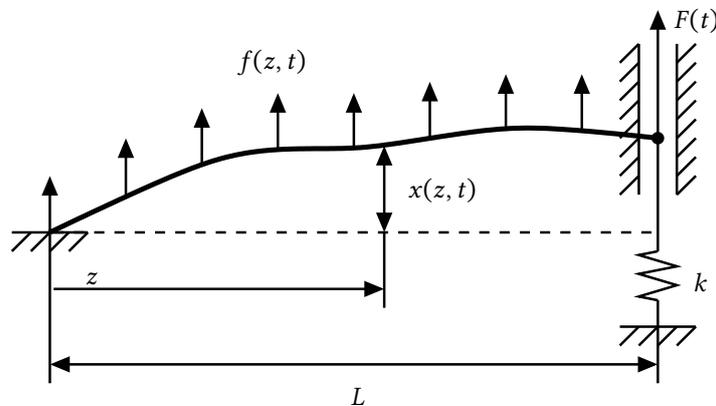
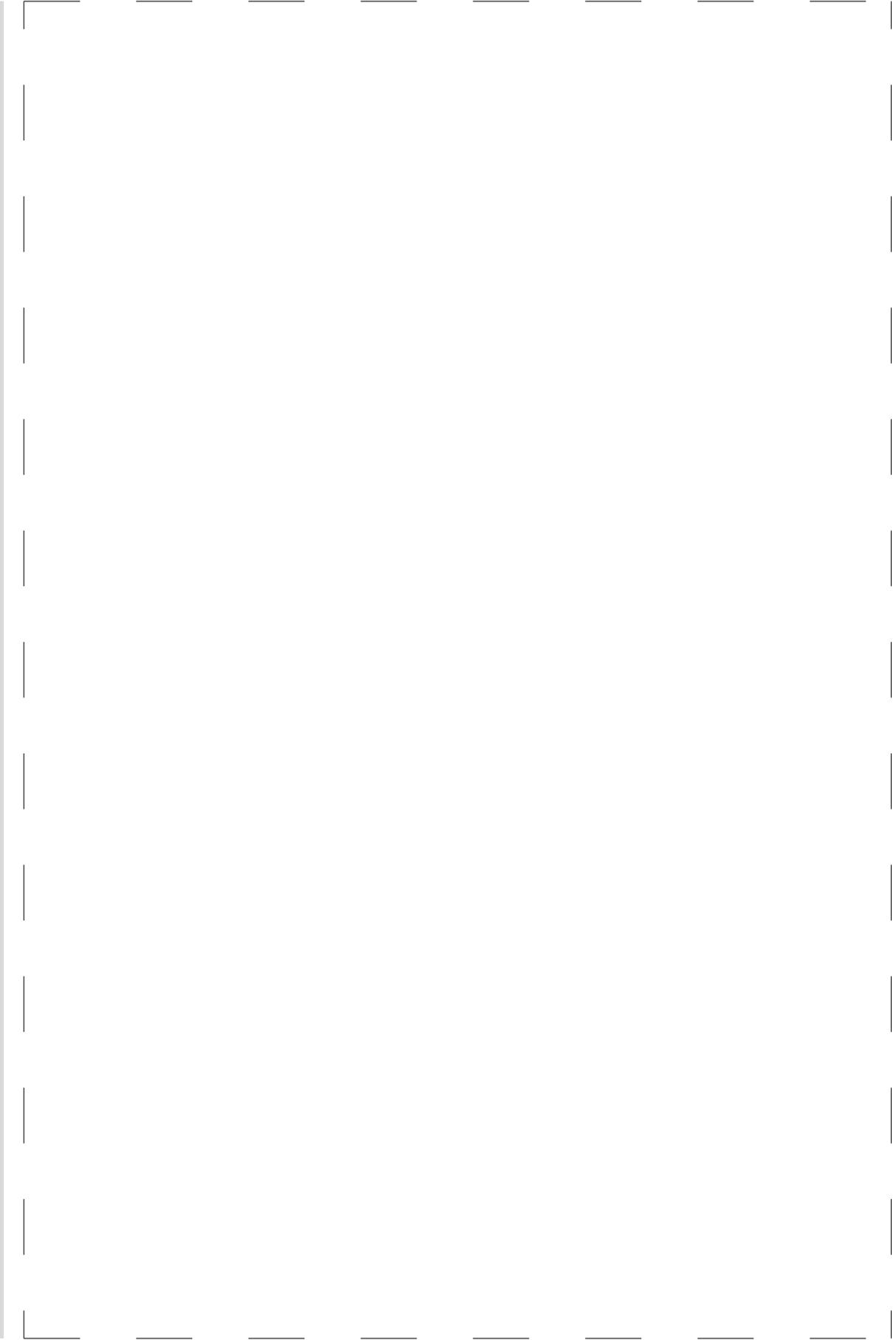
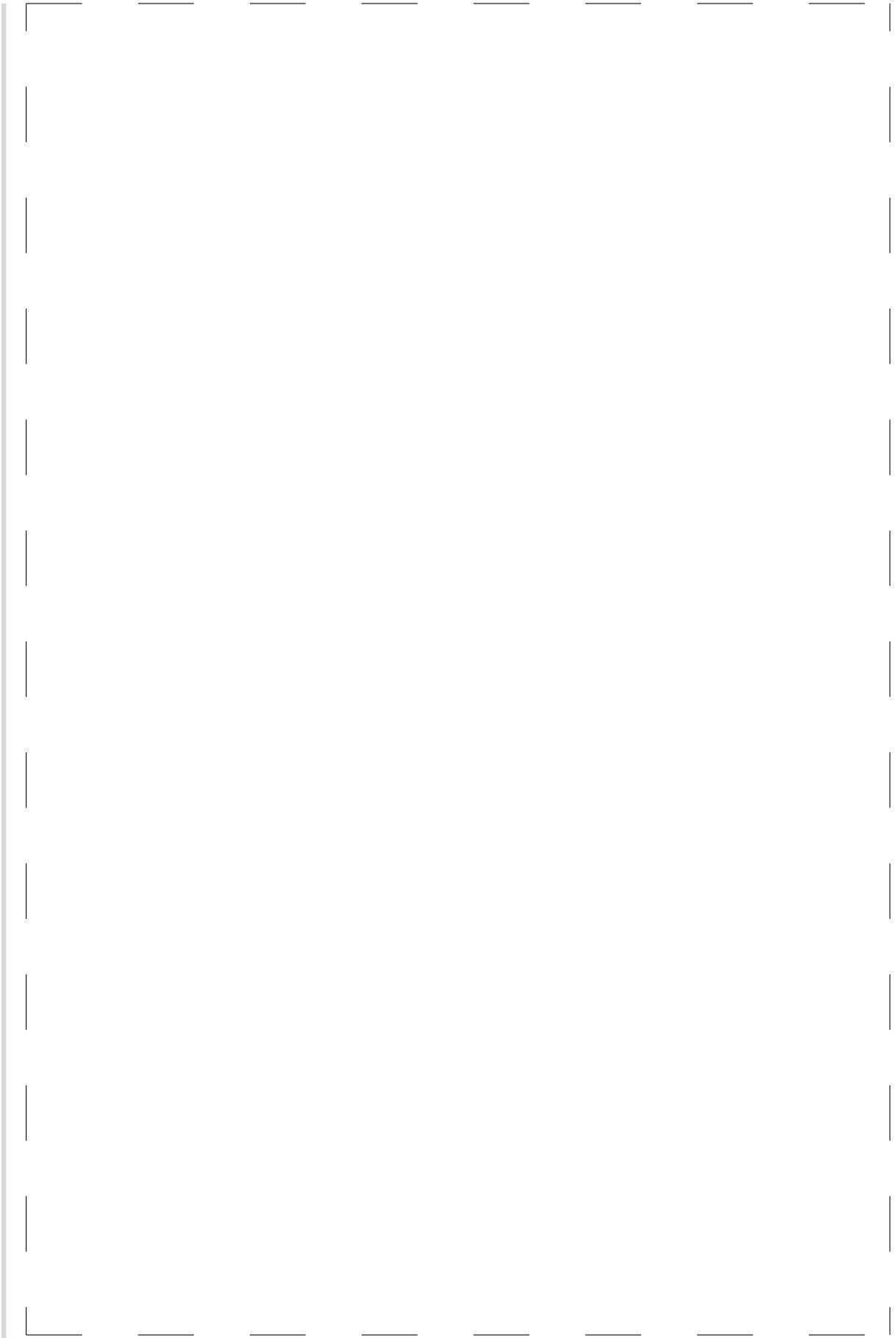


Abb. 1.6: Schwingende Saite.





**Beispiel 1.2 (Biegeschwingung eines Balkens).** Anhand des Beispiels der **transversalen Biegeschwingung** des in Abbildung 1.7 dargestellten Balkens wird im Folgenden eine weitere Anwendung des Hamiltonschen Prinzips illustriert. Hierbei sei bemerkt, dass die potenzielle Energie des Systems direkt unter der **klassischen Euler-Bernoulli-Annahme** erfolgt. Im Allgemeinen müssen jedoch zur Bestimmung der potenziellen Energie Ergebnisse der Kontinuumsmechanik herangezogen werden, so dass für eine allgemeine Analyse beispielsweise auf Reddy, 1984; Meirovitch, 1997 und dortige Referenzen verwiesen wird.

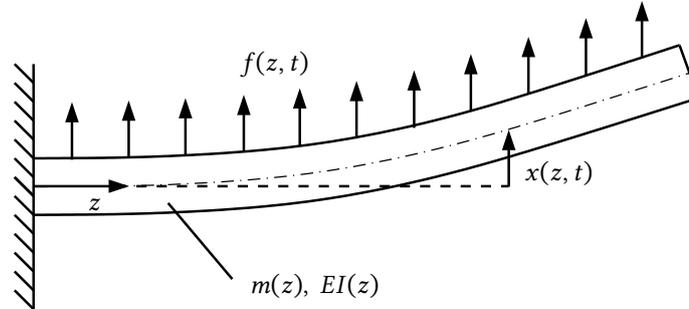


Abb. 1.7: Biegeschwingung eines Balkens.

Der betrachtete Balken der Länge  $L$ , Masse pro Einheitslänge  $m(z)$ , Elastizitätsmodul  $E$  und Trägheitsmoment  $I(z)$  sei wie oben dargestellt einseitig eingespannt und wird durch eine über die Oberfläche wirkende Flächenlast  $f(z, t)$  angeregt. Schwerkräfteinflüsse werden im Weiteren vernachlässigt, können jedoch direkt in die Formulierung der potenziellen Energie integriert werden.

Für die kinetische und potenzielle Energie des Balkens ergibt sich folglich (Meirovitch, 1997), dass

$$W_k = \frac{1}{2} \int_0^L m(z) \left( \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \right)^2 dz, \quad W_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI(z) \left( \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right)^2 dz.$$

Die virtuelle Arbeit der externen und nicht-konservativen Kraft  $f(x, t)$  ergibt sich zu

$$W_{nk} = \int_0^L f(z, t) x(z, t) dz.$$

Die erste Variation gemäß (1.5) führt somit auf

$$\delta I_H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ m(z) \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \delta x_t(z, t) - EI(z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \delta x_{zz}(z, t) + f(z, t) \delta x(z, t) \right] dz dt.$$

Hierbei gilt, dass  $\delta x_t(z, t) = \delta(\partial x(z, t)/\partial t)$  und  $\delta x_{zz}(z, t) = \delta(\partial^2 x(z, t)/\partial z^2)$ . Die einfache partielle Integration des ersten Terms bzgl.  $t$  und die zweifache partielle Integration des zweiten Terms bzgl.  $z$  führt unter Beachtung, dass  $\delta x(z, t_1) = \delta x(z, t_2) = 0$  schließlich zu

$$\begin{aligned} \delta I_H = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ -m(z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI(z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right) + f(z, t) \right] \delta x(z, t) dz dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[ EI(z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \delta x_z(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} \left( EI(z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right) \delta x(z, t) \right]_{z=0}^L dt. \end{aligned}$$

Aus dem **Hauptsatz der Variationsrechnung** folgt somit, dass

$$m(z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI(z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right) = f(z, t), \quad z \in (0, L), t > 0 \quad (1.6)$$

sowie die Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{entweder } \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad M = EI(z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0 \quad \text{an } z = 0 \text{ oder } z = L, \\ \text{entweder } x = 0 \quad \text{oder} \quad Q = -\frac{\partial}{\partial z} \left( EI(z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{an } z = 0 \text{ oder } z = L. \end{aligned}$$

Die Größen  $M$  und  $Q$  bezeichnen hierbei das Moment sowie die Querkraft. Aus den geometrischen Randbedingungen der Einspannung, d.h.

$$x(0, t) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.7)$$

folgen somit die so genannten natürlichen Randbedingungen des Systems direkt zu

$$EI(z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(L, t) = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial z} \left( EI(z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \Big|_{(L,t)} = 0, \quad t > 0 \quad (1.8)$$

womit das aus der klassischen Mechanik bekannte Ergebnis, dass am freien Rand keine Momente und Querkräfte übertragen werden, bestätigt wird. Die Bewegungsgleichung des Balkens ergibt sich somit aus der PDgln. (1.6) und den geometrischen und natürlichen Randbedingungen (1.7), (1.8). Zu einer vollständigen Systembeschreibung müssen noch konsistente Anfangsbedingungen

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z), \quad z \in [0, L] \quad (1.9)$$

vorgegeben werden. Es sei bemerkt, dass die partielle Differenzialgleichung (1.6) der Balkenbiegung auch als **biharmonische Differenzialgleichung** bezeichnet wird.

Weitere Beispiele sowie die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen piezoaktuierter flexibler mechanischer Strukturen sind in Aufgabe 1 zu finden.

## 1.2 Klassifikation von PDgln 2. Ordnung und das Charakteristikenverfahren

Die Klassifikation von PDgln. ermöglicht eine Charakterisierung des dynamischen Lösungsverhaltens der PDgln., woraus leistungsfähige (analytische) Lösungsverfahren speziell für so genannte hyperbolische PDgln. abgeleitet werden können. Darüber hinaus bestimmt aus Sicht der Numerik die Klassifikation die Wahl eines geeigneten numerischen Lösungsverfahrens, da für jede der im Folgenden charakterisierten Typen von PDgln. jeweils unterschiedliche numerische Verfahren zur Anwendung kommen. Im Hinblick auf regelungstechnische Anwendungen erweist sich die Klassifikation ebenfalls von großer Bedeutung, um dem unterschiedlichen dynamischen Verhalten der PDgln.-Typen Rechnung tragen zu können.

### 1.2.1 Semilineare PDgln. in 2 Koordinaten $z$ und $t$

Zur Motivation und Interpretation der Klassifikation von PDgln. wird im Folgenden eine lineare bzw. semilineare PDgln. 2. Ordnung in den Koordinaten  $z$  und  $t$  untersucht

$$a_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} + a_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial x}{\partial z} + b_2 \frac{\partial x}{\partial t} + cx = f(z, t, x), \quad (1.10)$$

wobei  $a_{ij}$ ,  $b_j$ ,  $i, j = 1, 2$  als bekannte Funktionen in  $z$  und  $t$  vorausgesetzt werden. Das so genannte **Cauchy-Problem** besteht nun darin, eine Lösung  $x(z, t)$  von (1.10) mit auf einer Kurve  $\Gamma$  der  $(z, t)$ -Ebene vorgegebenen konsistenten Werten von  $x$ ,  $\partial x / \partial z$ ,  $\partial x / \partial t$  zu ermitteln. Für eine in Parameterform gegebene Kurve

$$\Gamma : (z, t) = (\alpha(\zeta), \beta(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{R}$$

werden im Weiteren die Anfangswerte entsprechend

$$x|_{\Gamma} = h(\zeta), \quad \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{\Gamma} = \psi(\zeta), \quad \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = \phi(\zeta) \quad (1.11)$$

vorgegeben. Offensichtlich gilt entlang der Kurve  $\Gamma$ , dass

$$\frac{dx}{d\zeta} = h'(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial z} \alpha'(\zeta) + \frac{\partial x}{\partial t} \beta'(\zeta), \quad (1.12)$$

wobei  $(\cdot)'$  die Ableitung nach  $\zeta$  repräsentiert. Hieraus ist leicht ersichtlich, dass nur zwei der Funktionen  $h(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$ ,  $\phi(\zeta)$  unabhängig voneinander frei gewählt werden können. Gleichung (1.12) stellt somit eine Konsistenz- bzw. Kompatibilitätsbedingung dar, der die Anfangswerte gehorchen müssen. Des Weiteren gelten ähnliche Bedingungen für die höheren Ableitungen entlang  $\Gamma$

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{\partial x}{\partial z} = \psi'(\zeta) = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \alpha'(\zeta) + \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} \beta'(\zeta) \quad (1.13)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{\partial x}{\partial t} = \phi'(\zeta) = \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} \alpha'(\zeta) + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \beta'(\zeta) \quad (1.14)$$

⋮

Eine Lösung  $x(z, t)$  von (1.10), (1.11) muss folglich das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ \alpha'(\zeta) & \beta'(\zeta) & 0 \\ 0 & \alpha'(\zeta) & \beta'(\zeta) \end{bmatrix}}_{=: \Lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(z, t, x) - (b_1 \frac{\partial x}{\partial z} + b_2 \frac{\partial x}{\partial t} + cx) \\ \psi'(\zeta) \\ \phi'(\zeta) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

erfüllen, wobei die Existenz einer eindeutigen Lösung mit Ausnahme des Falls

$$\det \Lambda = a_{11} \beta'^2(\zeta) - 2a_{12} \alpha'(\zeta) \beta'(\zeta) + a_{22} \alpha'^2(\zeta) = 0 \quad (1.16)$$

sichergestellt ist. Die Kurve  $\Gamma$  wird **charakteristische Kurve** oder **charakteristische Richtung** genannt falls  $\det \Lambda = 0$  entlang  $\Gamma$  bzw. **nicht-charakteristische Kurve** oder **nicht-charakteristische Richtung** falls  $\det \Lambda \neq 0$  entlang  $\Gamma$  (John, 1982).

Entlang jeder nicht-charakteristischen Kurve  $\Gamma$  können aus (1.15) alle Ableitungen 2. Ordnung von  $x(z, t)$  bestimmt werden. Somit können in ähnlicher Weise alle Ableitungen höherer Ordnung von  $x(z, t)$  (Existenz vorausgesetzt) auf  $\Gamma$  ermittelt werden, so dass in jedem Punkt  $(z_0, t_0)$  von  $\Gamma$  eine formale Potenzreihe in  $(z - z_0)$ ,  $(t - t_0)$  für die Lösung des Cauchy-Problems (1.10), (1.11) bestimmt werden kann. Für analytische Lösungen  $x(z, t)$  ergibt sich somit direkt die Potenz- bzw. Taylorreihendarstellung in der Umgebung eines jeden Punktes  $(z_0, t_0)$  von  $\Gamma$ . Dies setzt jedoch analytische Anfangswerte (1.11) voraus, was zum so genannten Satz von **Cauchy-Kowalevskaja** führt (John, 1982).

Falls die Anfangsdaten (1.11) entlang einer charakteristischen Kurve  $\Gamma$  vorgegeben werden, so hat das Cauchy-Problem (1.10) mit auf  $\Gamma$  vorgegebenen Anfangsdaten (1.11) im Allgemeinen keine (eindeutige) Lösung. Die Lösung entlang  $\Gamma$  wird nicht eindeutig durch die Anfangsdaten (1.11) bestimmt – das Cauchy-Problem ist nicht wohldefiniert. Jedoch können aus  $\det \Lambda = 0$  weiterführende Einsichten in das Lösungsverhalten und dementsprechend in die Klassifikation der PDgln. sowie in die Existenz von Lösungen gewonnen werden. Insbesondere ist Gleichung (1.16) wegen  $\alpha'(\zeta) = dz/d\zeta$  bzw.  $\beta'(\zeta) = dt/d\zeta$  äquivalent zu

$$a_{11} dt^2 - 2a_{12} dt dz + a_{22} dz^2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Bestimmungsgleichung der charakteristischen Kurve  $\Gamma$  als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (Dgl.)

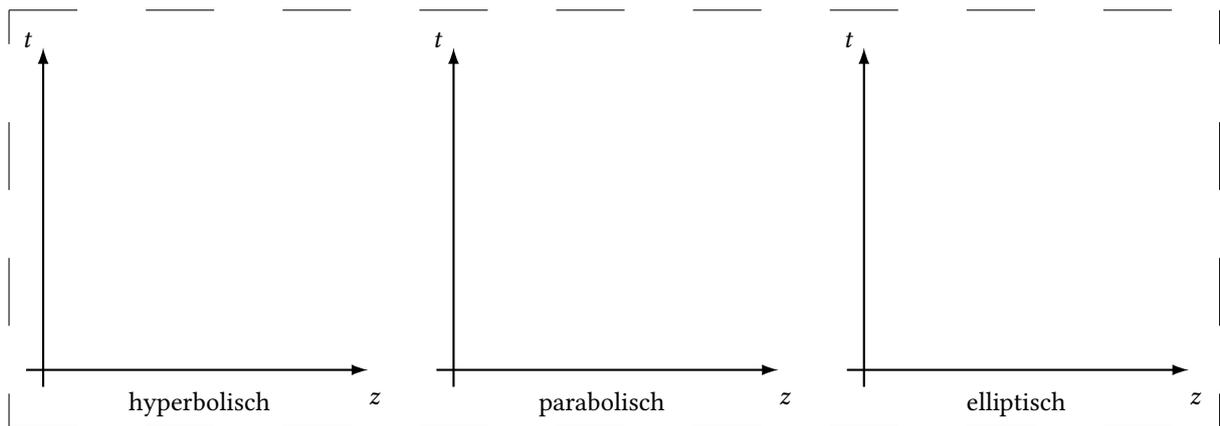
$$\frac{dt}{dz} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}{a_{11}}. \quad (1.17)$$

Entsprechend der Ausführungen z.B. in John, 1982 erlaubt dies die Klassifikation der PDgln. (1.10) in

- **hyperbolisch**, falls  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ ;
- **elliptisch**, falls  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0$ ;
- **parabolisch**, falls  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$  mit  $b_2 \neq 0$ .

Die Namensgebung der Klassifikation erfolgt in Anlehnung an die Klassifikation von Kegelschnitten. Für konstante

$a_{ij}, b_j, i, j = 1, 2$  stellen die Lösungen von (1.17) Geraden  $t(z) = mz + c$  in der  $(z, t)$ -Ebene dar. Des Weiteren



**Abb. 1.8:** Verlauf der Charakteristiken in der  $(z, t)$ -Ebene im Fall einer hyperbolischen, parabolischen oder elliptischen PDGln. 2. Ordnung.

kann im hyperbolischen Fall gezeigt werden, dass das Cauchy-Problem wohl-definiert ist, also eine eindeutige Lösung besitzt, falls die Anfangsdaten nicht auf einer charakteristischen Kurve der PDGln. gegeben sind (vgl. Beispiel 1.3).

Es ist hier zu betonen, dass aus systemtheoretischer bzw. regelungstechnischer Sicht ausschließlich parabolische und hyperbolische PDGln. von Interesse sind.

**Beispiel 1.3 (Lineare Wellengleichung).** Im Folgenden werden die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts zur Analyse der Gleichungen der schwingenden Saite aus Beispiel 1.1 verwendet.

*Der Vergleich der Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}$$

mit der allgemeinen Form der betrachteten PDGln. (1.10) liefert

$$a_{11} = -c^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1.$$

Wegen  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = c^2 > 0$  ist die Wellengleichung entsprechend der obigen Klassifikation **hyperbolisch**. Wie im Weiteren gezeigt wird, ermöglicht dies die Bestimmung einer Normalform der Wellengleichung, durch die Einführung neuer Koordinaten. Aus der Normalform kann dabei unmittelbar eine geschlossene Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems (AWPs) ermittelt werden.

- *Bestimmung der Charakteristiken:* Mit den Parametern der Wellengleichung führt die Auswertung von (1.17) auf

$$\frac{dt}{dz} = \pm \frac{1}{c} = \text{konst.},$$

so dass sich mit  $t(z_0) = 0, z_0 \in \mathbb{R}$  (beliebig aber fest) die Kurvenschar in der  $(z, t)$ -Ebene ergibt

$$\Gamma_{1,2} : \quad t = \pm \frac{1}{c}(z - z_0).$$

- PDgl.-Normalform der Wellengleichung: Mit  $\Gamma_{1,2}$  können unmittelbar neue Koordinaten eingeführt werden:

$$\Gamma_1 : t = \frac{1}{c}(z - \eta) \Rightarrow \eta = z - ct$$

$$\Gamma_2 : t = -\frac{1}{c}(z - \zeta) \Rightarrow \zeta = z + ct.$$

In diesem neuen  $(\eta, \zeta)$ -Koordinatensystem nimmt die PDgl. der Wellengleichung eine besonders einfache Form an. Es gilt  $x(z, t) = \bar{x}(\eta(z, t), \zeta(z, t))$ , womit sich die Ableitungen zu

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = c \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta}$$

ergeben. Die Wellengleichung in neuen Koordinaten folgt somit zu

$$0 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) x(z, t) = -4c^2 \frac{\partial^2 \bar{x}(\eta, \zeta)}{\partial \eta \partial \zeta}.$$

Aufgrund der einfachen Struktur wird die PDgl. auf der rechten Seite der letzten Identität auch als Normalform bezeichnet. Ihre Lösung kann direkt als  $\bar{x}(\eta, \zeta) = p(\eta) + q(\zeta)$  ermittelt werden, mit beliebigen 2-fach stetig differenzierbaren Funktionen  $p(\eta)$  und  $q(\zeta)$ . In den Originalkoordinaten entspricht dies der Lösung  $x(z, t) = p(z - ct) + q(z + ct)$ .

- Wohldefiniertheit und Lösung des AWP (Charakteristikenverfahren): Für die Wahl der Anfangsbedingungen werden im Folgenden zwei Fälle unterschieden:

- **Die Anfangswerte sind nicht auf  $\Gamma_{1,2}$  gegeben.** Hierzu werden die beiden ABn  $x(z, 0) = x_0(z)$  und  $\partial x / \partial t(z, 0) = x_1(z)$  betrachtet. Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung  $x(z, t)$  müssen die Funktionen  $p(\cdot)$  und  $q(\cdot)$  aus den Bedingungen

$$p(z) + q(z) = x_0(z), \quad c(q'(z) - p'(z)) = x_1(z)$$

ermittelt werden. Dies führt auf die so genannte **D'Alembertsche Lösung** des AWP

$$x(z, t) = \frac{1}{2} \left( x_0(z - ct) + x_0(z + ct) + \frac{1}{c} \int_{z-ct}^{z+ct} x_1(\tau) d\tau \right).$$

- **Die Anfangswerte sind auf  $\Gamma_{1,2}$  gegeben.** In diesem Fall werden aus Gründen der Einfachheit die ABn im  $(\eta, \zeta)$ -Koordinatensystem zu  $\bar{x}(\eta, 0) = 0$  und  $\partial \bar{x} / \partial \zeta(\eta, 0) = 0$  vorgegeben. Somit folgt unmittelbar, dass sowohl

$$\bar{x}(\eta, \zeta) = 0$$

als auch beispielsweise

$$\bar{x}(\eta, \zeta) = g(\zeta) \text{ mit } g(0) = \frac{dg}{d\zeta}(0) = 0$$

Lösung der PDgl.-Normalform  $-4c^2 \partial^2 \bar{x}(\eta, \zeta) / (\partial \eta \partial \zeta)$  darstellen. Offensichtlich kann in diesem Fall keine eindeutige Lösung des AWP bestimmt werden, weshalb das Problem in dieser Konfiguration, d.h. mit Anfangswerten auf der charakteristischen Kurve, nicht wohl-definiert ist.

Die obigen Ergebnisse zur Klassifikation von semilinearen PDgln. 2. Ordnung können im Prinzip auf den Fall von  $n > 2$  Koordinaten  $z_i$  sowie quasilinearen PDgln. 2. Ordnung (linear in den höchsten Ableitungen mit Koeffizienten die vom Zustand und dessen Ableitungen 1. Ordnung abhängen) übertragen werden. Jedoch erfordert die Herleitung einen etwas größeren Aufwand, so dass auf die Ausführungen in John, 1982; Whitham, 1999; Denath, 2005 verwiesen wird. Des Weiteren ergeben sich für quasilineare Systeme weitere Einschränkungen, die insbesondere mit der Lösungssexistenz zusammenhängen.

## 1.2.2 Typen partieller Differenzialgleichungen

Die untenstehende Zusammenstellung liefert einen kompakten Überblick mit Beispielen zu den einzelnen Klassen partieller Differenzialgleichungen.

### Parabolische partielle Differenzialgleichungen

Physikalisches Modell	Gleichung	Charakteristiken
Ausgleichsprozesse	$\rho c_p \frac{\partial x}{\partial t} - a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = f(u, z, t)$ <p>Beispiele:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wärmeleitung Spez. Wärmekapazität <math>\rho c_p</math> Wärmeleitkoeffizient <math>a = \lambda</math></li> <li>• Diffusion <math>\rho c_p = 1</math>, Diffusionszahl <math>a = D</math>,</li> <li>• Elektrische RC-Leitung (vgl. Abschnitt 1.1.2) <math>\rho c_p = 1</math>, <math>a = 1/(\bar{R}\bar{C})</math></li> </ul>	$dt = 0 \Rightarrow t = \bar{t}$ (1 Schar)
Ausgleichsprozesse mit Strömung	$\rho c_p \frac{\partial x}{\partial t} + v \rho c_p \frac{\partial x}{\partial z} - a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = f(x, u)$ <p>Strömungsgeschwindigkeit <math>v</math></p>	

### Hyperbolische partielle Differenzialgleichungen

Physikalisches Modell	Gleichung	Charakteristiken
Transport- oder Strömungssystem	$\frac{\partial x}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial z} = f(u, z, t)$ <p>Strömungsgeschwindigkeit <math>v</math>,                      Lauf- bzw. Totzeit <math>L/v</math></p>	$\frac{dz}{dt} = v,$ $z(t) = z(0) + vt$ (1 Schar)
Harmonische Schwingungen Wellenausbreitung	$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = f(u, z, t)$ <p>Beispiele:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Elektrische <math>LC</math>-Leitung  <math>a = 1/(\bar{L}\bar{C})</math></li> <li>• Druck-/Schallwellen                      Schallgeschwindigkeit <math>\sqrt{a} = c</math></li> <li>• Saite (vgl. Beispiel 1.1)  <math>a = P/\mu</math> mit Spannung <math>P</math> und                      Masse/Länge <math>\mu</math></li> </ul>	$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{a}$ $z(t) = \sqrt{a}t + z(0)$ $z(t) = -\sqrt{a}t + z(0)$ (2 reelle Scharen)
Gedämpfte Schwingungen und Wellen	$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial t} - a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial z} = f(x, u)$ <p>Dämpfungskonstanten <math>\alpha_i</math></p>	

### Biharmonische partielle Differenzialgleichungen

Physikalisches Modell	Gleichung	Charakteristiken
Biharmonische Schwingungen	$\mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \beta \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + \alpha_2 \frac{\partial^5 x}{\partial t \partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \gamma \frac{\partial x}{\partial z} \right) = f(x, u)$ <p>Beispiel:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Elastische Balken (vgl. Beispiel 1.2)                      Masse/Länge <math>\mu</math>                      Dämpfungskonstanten <math>\alpha_i</math>                      (<math>i = 1</math> extern, <math>i = 2</math> intern)                      Biegesteifigkeit <math>\beta</math>, Längskraft <math>\gamma</math></li> </ul>	

## Elliptische partielle Differenzialgleichungen

Physikalisches Modell	Gleichung	Charakteristiken
Örtlich 2-dimensionale Potentialverteilungen	$\frac{\partial^2 x}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z_2^2} = f(x, u)$ <p>Beispiele:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Stationäres elektrisches oder magnetisches Feld (Laplace- oder Poisson-Gleichung)</li> <li>• Stationäre Ausgleichsprozesse</li> <li>• Gravitationsfeld</li> </ul>	$\frac{dz_1}{dz_2} = \pm \sqrt{-1}$ <p>(konj. komplex, ohne phys. Bedeutung)</p>

### 1.3 Grundprinzipien des Regelungs- und Beobachterentwurfs für Systeme mit verteilten Parametern

Zur Vorbereitung und Illustration der in den folgenden Kapiteln betrachteten Analyse und Entwurfsmethoden für SVPn werden im Weiteren zunächst die grundlegenden Entwurfszugänge bzw. Entwurfsansätze einführend erläutert.

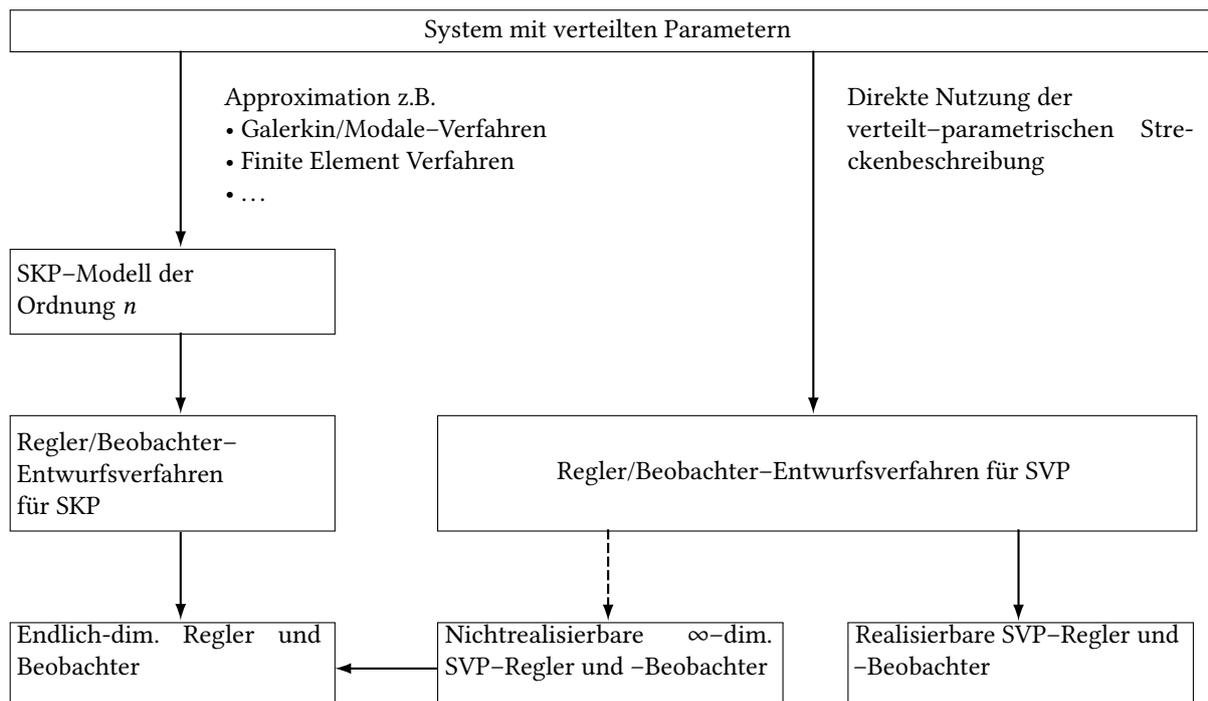
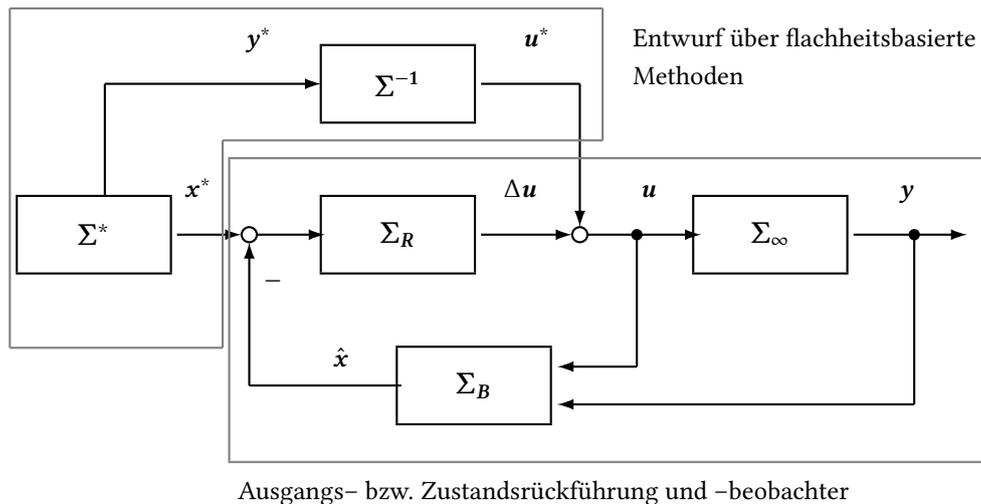


Abb. 1.9: Schematischer Vergleich des "early lumping" und "late lumping" Entwurfes.

#### 1.3.1 "Early lumping" und "Late lumping" Entwurf

Im Allgemeinen beruht der Regelungsentwurf für Systeme die durch PDgln. beschrieben werden auf zwei Prinzipien, dem so genannten "**early lumping**", bei dem die geltenden PDgln. zuerst mit geeigneten Methoden in ein System von gewöhnlichen Dgln. überführt werden, und dem so genannten "**late lumping**" bei dem



**Abb. 1.10:** Zwei-Freiheitsgrad-Struktur des Regelkreises mit Trajektorienplanung  $\Sigma^*$ , Vorsteuerung  $\Sigma^{-1}$ , Ausgangs- oder Zustandsrückführung  $\Sigma_R$ , Zustandsbeobachter  $\Sigma_B$  und verteilt-parametrischer Strecke  $\Sigma_\infty$ .

der Entwurf direkt anhand der verteilt-parametrischen Streckenbeschreibung erfolgt. Dies ist untenstehend schematisch erläutert.

Der Vorteil des "early lumping" liegt in der Möglichkeit, die für finit-dimensionale (nichtlineare) Systeme vorhandenen vielfältigen und im Allgemeinen sehr gut entwickelten Analyse- und Entwurfsmethoden heranzuziehen. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass deren Anwendung aufgrund der im Allgemeinen notwendigen **hoch-dimensionalen Approximation des SVPn** oftmals stark eingeschränkt ist, so dass zusätzlich Methoden zur **Modellreduktion** angewandt werden müssen. Zusätzlich treten durch die Modellapproximation und ggf. -reduktion neue und oftmals unphysikalische Parameter in den Modellgleichungen auf, die u.U. erst mit geeigneten Identifikations- und/oder Optimierungsverfahren aus Messungen ermittelt bzw. eingestellt werden müssen. Des Weiteren ist zu betonen, dass die so entworfene Regelung im Allgemeinen nicht die Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit der verteilt-parametrischen Strecke garantiert. Insbesondere können so genannte **"spillover"-Effekte**, wie sie in Kapitel 3 untersucht werden, zu einer Destabilisierung des Systems führen.

Demgegenüber wird beim "late lumping" Entwurf die vollständige Dynamik des SVPn berücksichtigt. Approximationsfehler, die typischerweise im "early lumping" Entwurf auftreten und zu einer verringerten Regelgüte bzw. zur Destabilisierung führen, werden somit vermieden. Insbesondere zeigen die Modellierungsbeispiele in Abschnitt 1.1, dass die Beschreibung in Form von PDgln. typischerweise nur relativ wenige Parameter mit physikalischer Bedeutung aufweist, weshalb im Allgemeinen die aufwendige Ermittlung der durch Approximationsmethoden induzierten Parameter vermieden werden kann. Diese Vorteile gehen jedoch mit einem deutlich höheren mathematischen Analyse- und Entwurfsaufwand einher.

### 1.3.2 Regelkreisstruktur mit zwei Freiheitsgraden zur Trajektorienfolgeregelung

Für SKP hat sich die so genannte **Zwei-Freiheitsgrad-Struktur (2FHG-Struktur)** nach Horowitz, 1963 als prinzipielle Basis industrieller Folgeregelungen erwiesen, wobei einerseits das Führungs- und andererseits das Störverhalten des geschlossenen Regelkreises unabhängig voneinander entworfen werden. Hierzu wird der klassische Regelkreis bestehend aus Strecke  $\Sigma_\infty$ , Ausgangs- oder Zustandsrückführung  $\Sigma_R$  und ggf. Zustandsbeobachter  $\Sigma_B$  um Trajektorienplanung  $\Sigma^*$  und Steuerung  $\Sigma^{-1}$  ergänzt, womit sich die untenstehende Struktur ergibt.

Es ist insbesondere anzumerken, dass in der Literatur:

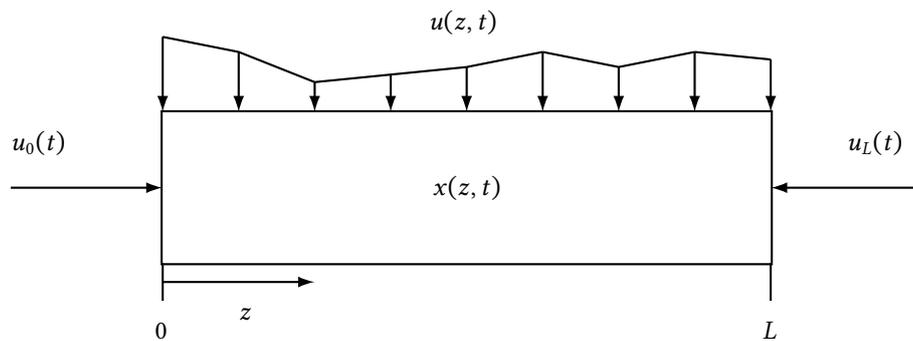
- für SVPn meist die Stabilisierungsaufgabe jedoch nicht das Trajektorienfolgeproblem betrachtet wird. Eine Ausnahme bilden die Methoden der optimalen Steuerung und Regelung (Lions, 1971; Tröltzsch, 2005).
- nur wenige Methoden zum systematischen Steuerungsentwurf und der Trajektorienplanung vorhanden sind.

Vielversprechende Ergebnisse in Hinblick auf eine methodische Lösung des Trajektorienfolgeproblems wurden im Rahmen der Erweiterung der so genannten **differenziell flachen Systeme** auf SVPn, siehe z.B. (Fliess u. a.,

1997; Lynch und Rudolph, 2002; Rudolph, 2003; Meurer und Zeitz, 2005; Meurer, 2005; Meurer, Thull u. a., 2008; Meurer, 2013), gewonnen. Eine erste Einführung in diese Methodik und deren Kombination mit den im Weiteren untersuchten Regelungsentwurfsverfahren wird in Kapitel 4 gegeben.

Speziell für SVPn werden sowohl der Steuerungs- als auch der Regelungsentwurf durch den unendlich-dimensionalen Charakter der zugrundeliegenden Systemgleichungen erschwert. Dies soll anhand der Gleichungen eines linearen Wärmeleiters illustriert werden.

**Beispiel 1.4 (Idealisierter Steuerungs- und Regelungsentwurf für einen Wärmeleiter).** Im Weiteren wird der Aufheizvorgang des in Abbildung 1.11 dargestellten Wärmeleiters untersucht.



**Abb. 1.11:** Wärmeleiter mit kontinuierlich verteilter Stellgröße.

Die Temperaturverteilung  $x(z, t)$  gehorcht dabei der PDgl.

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = u(z, t) \quad z \in (0, L), t > 0. \quad (1.18)$$

mit AB

$$x(z, 0) = x_0(z) \equiv 0 \quad z \in [0, L] \quad (1.19)$$

und RBn

$$x(0, t) = u_0(t), \quad x(L, t) = u_L(t) \quad t > 0. \quad (1.20)$$

Wird das Ortsprofil  $u(z, t)$  für  $z \in [0, L]$ ,  $t \geq 0$  als Stellgröße aufgefasst, so können direkt eine Steuerung und eine Folgeregelung entsprechend der 2FHG-Struktur aus Abbildung 1.10 entworfen werden.

- **Flacher Ausgang:** Die Wahl einer "fiktiven" Ausgangsgröße  $y(z, t) = x(z, t)$  führt wegen

$$x(z, t) = y(z, t), \quad u(z, t) = \frac{\partial y(z, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial z^2}$$

auf die Gleichungen des so genannten inversen Systems  $\Sigma^{-1}$ . Diese stellen eine (differenzielle) Parametrierung des Zustandes  $x(z, t)$  sowie des Eingangs  $u(z, t)$  durch  $y(z, t)$  und dessen zeitliche und örtliche Ableitungen dar. Wie in Kapitel 4 gezeigt werden wird, entspricht  $y(z, t)$  für das betrachtete idealisierte Szenario einem so genannten flachen Ausgang.

- **Trajektorienplanung  $\Sigma^*$  und Steuerungsentwurf  $\Sigma^{-1}$ :** Die Vorgabe geeigneter und hinreichend oft differenzierbarer Solltrajektorien  $y^*(z, t)$  für  $y(z, t)$ , die aus Konsistenzgründen die Bedingungen

$$\begin{aligned} y^*(z, 0) &= 0, & z &\in [0, L] \\ y^*(0, t) &= u_0(t), & t &> 0 \\ y^*(L, t) &= u_L(t), & t &> 0 \end{aligned}$$

erfüllen müssen, liefert die Steuerung

$$u^*(z, t) = \frac{\partial y^*(z, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 y^*(z, t)}{\partial z^2},$$

die notwendig ist, um die Trajektorienfolge  $y(z, t) = x(z, t) \rightarrow x^*(z, t) = y^*(z, t)$  für alle  $z \in [0, L]$  und  $t \geq 0$  zu realisieren. Offensichtlich kann dem System ein gewünschtes Führungsverhalten direkt durch die entworfene Steuerung eingeprägt werden. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die Anwendung der Steuerung auf den nominellen Fall eines stabilen Systems ohne Störungen und Modellfehler beschränkt ist. Andernfalls muss zusätzlich eine geeignete Regelung entworfen werden.

- **Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers:** Für  $u(z, t) = u^*(z, t) + \Delta u(z, t)$  erfüllt der Folgefehler  $\Delta x(z, t) = x(z, t) - y^*(z, t)$  die PDgl.

$$\frac{\partial \Delta x(z, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \Delta x(z, t)}{\partial z^2} = \Delta u(z, t), \quad z \in (0, L), \quad t > 0.$$

Diese Gleichung beschreibt dabei die verteilt-parametrische Dynamik des Trajektorienfolgefehlers. Im betrachteten idealisierten Szenario kann nun leicht eine den Trajektorienfolgefehler exponentiell stabilisierende Zustandsrückführung  $\Sigma_R$  entworfen werden. Die Wahl

$$\Delta u(z, t) = -p_0 \Delta x(z, t) - a \frac{\partial^2 \Delta x(z, t)}{\partial z^2}$$

führt dabei auf die PDgl.

$$\frac{\partial \Delta x(z, t)}{\partial t} = -p_0 \Delta x(z, t),$$

welche für  $\Delta x(z, 0) = \Delta x_0(z)$  wegen  $\Delta x(z, t) = \exp(-p_0 t) \Delta x_0(z)$  für  $p_0 > 0$  exponentiell stabil ist. Mittels der so entworfenen Zustandsrückführung kann also die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers unmittelbar vorgegeben werden.

Wie einleitend erwähnt beruhen die obigen Ergebnisse auf der Annahme einer idealisierten Eingangsgröße. In der Realität ergeben sich die Stellgrößen jedoch typischerweise in der Form

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^m b_i(z) u_i(t) \quad \text{bzw.} \quad u(z, t) = \delta(z - \bar{z}) u(t).$$

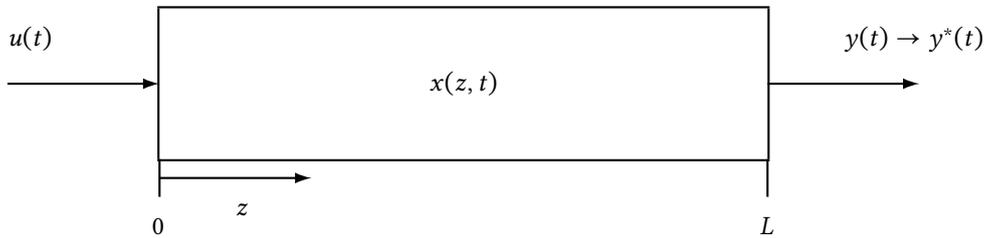
Aufgrund der Separation der unabhängigen Variablen  $z$  und  $t$  ist offensichtlich, dass die entworfene Zustandsrückführung  $\Delta u(z, t)$  **nicht realisierbar** ist. Des Weiteren ist zu bemerken, dass die (theoretische) Implementierung von  $\Delta u(z, t)$  die Kenntnis des vollständigen Profils  $\Delta x(z, t)$  für alle  $z \in [0, L]$  und  $t \geq 0$  sowie dessen zweifache örtliche Ableitung erfordert. Wie im folgenden Abschnitt erläutert wird, sind beide Größen jedoch messtechnisch nicht zugänglich.

Diese Einschränkungen zeigen deutlich, weshalb die Annahme einer Eingangsgröße der Form  $u(z, t)$  als idealisiert bezeichnet wird. Ein realisierbarer Steuerungs- und Regelungsentwurf muss also unter Einhaltung gewisser Nebenbedingungen bzgl. der Wahl der Stell- und Messgrößen erfolgen.

### 1.3.3 Stell- und Messgrößen

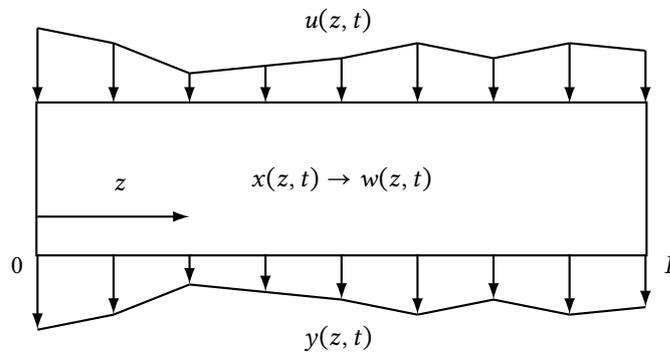
Wie es in dem obigen Beispiel ersichtlich ist, ergibt sich offensichtlich beim Steuerungs- und Regelungsentwurf für SVPn eine weitaus größere Vielfalt an Möglichkeiten für die Auswahl von Stellgrößen und Mess- bzw. Regelgrößen als im konzentriert-parametrischen Fall. Je nach Position und Anzahl der Stelleingriffe unterscheidet man zwischen den folgenden drei Konfigurationen:

- Randeingriff bzw. Randausgang



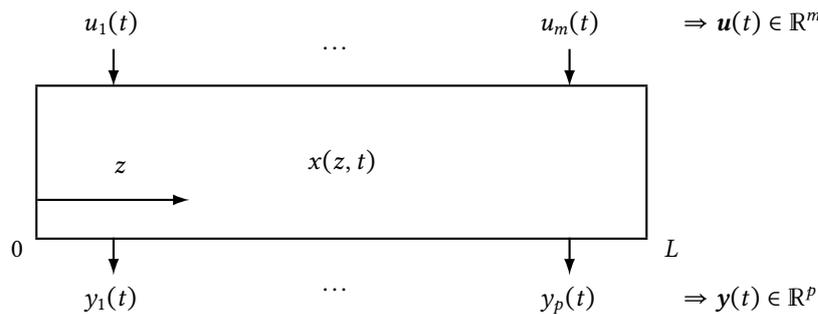
Im Fall der aus praktischer Sicht wichtigen Fälle des Randeingriffs bzw. Randausgangs sind die Stell- und Messgrößen örtlich konzentriert an den Rändern des Ortsbereichs gegeben.

- Kontinuierlich verteilten Stell- und Messgrößen



Für diesen, an sich nur theoretisch interessanten Fall mit unendlich-dimensionaler Stell- bzw. Messgröße wird angenommen, dass  $u(z, t)$  und  $y(z, t)$  beliebige und nicht in orts- und zeitvariable Komponenten separierbare Funktionen darstellen.

- Punktweise verteilten Stell- und Messgrößen



Im diesem Fall lassen sich die  $m$  Stell- und  $p$  Messgrößen mathematisch entsprechend

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^m b_i(z) u_i(t)$$

und

$$y_j(t) = \int_0^L c_j(z) x(z, t) dz, \quad j = 1, \dots, p$$

erfassen. Dabei stellen  $b_i(z)$  und  $c_j(z)$  die **Ortscharakteristiken der Stell- bzw. Messglieder** dar. Typische Beispiele für diese Konfiguration stellen chemische Reaktoren mit Kühlmantel (vgl. Abschnitt 1.1.4)

oder mittels Piezo-Patches aktuierte mechanische Strukturen (vgl. *Aufgabe 1*) dar. Aus mathematischer Sicht tritt dabei jedoch die Schwierigkeit auf, dass die Beschreibung von punktwise wirkenden Stell- und Messgrößen zum Auftreten von **Dirac Delta-Funktionen** führt, d.h.  $u(z, t) = \delta(z - \bar{z})u(t)$  sowie  $y(z, t) = \int_0^L \delta(z - \hat{z})x(z, t)dz = x(\hat{z}, t)$  (vgl. *Aufgabe 1.3*). Dies führt im Rahmen der mathematischen Systemanalyse zu so genannten unbeschränkten Operatoren, wie sie in Kapitel 3 untersucht werden.

## Literatur

- Baehr, H. und K. Stephan (1996). *Wärme- und Stoffübertragung*. Second. Berlin: Springer-Verlag (siehe S. 5, 6).
- Denath, L. (2005). *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. Second. Basel: Birkhäuser (siehe S. 15).
- Fliess, M., H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph (1997). „Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d’une poutre flexible“. In: *ESAIM Proceedings* 2, S. 183–193 (siehe S. 18).
- Horowitz, I. (1963). *Synthesis of Feedback Systems*. New York: Academic Press (siehe S. 18).
- John, F. (1982). *Partial differential equations*. Fourth. Springer-Verlag, New York (siehe S. 12, 15).
- Lions, J. (1971). *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag (siehe S. 18).
- Lynch, A. und J. Rudolph (2002). „Flatness-based boundary control of a class of quasilinear parabolic distributed parameter systems“. In: *Int. J. Control* 75.15, S. 1219–1230 (siehe S. 19).
- Meirovitch, L. (1997). *Principles and techniques of vibrations*. New Jersey: Prentice Hall (siehe S. 7, 10).
- Meurer, T. (2005). *Feedforward and Feedback Tracking Control of Diffusion-Convection-Reaction Systems using Summability Methods*. Fortschr.-Ber. VDI reihe 8 nr. 1081. VDI Verlag, Düsseldorf (siehe S. 19).
- Meurer, T. und M. Zeitz (2005). „Feedforward and feedback tracking control of nonlinear diffusion-convection-reaction systems using summability methods“. In: *Ind. Eng. Chem. Res.* 44, S. 2532–2548 (siehe S. 19).
- Meurer, T. (2013). *Control of Higher-Dimensional PDEs: Flatness and Backstepping Designs*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag (siehe S. 19).
- Meurer, T., D. Thull und A. Kugi (2008). „Flatness-based tracking control of a piezoactuated Euler-Bernoulli beam with non-collocated output feedback: theory and experiments“. In: *Int. J. Contr.* 81.3, S. 475–493 (siehe S. 19).
- Reddy, J. (1984). *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. New York: Wiley-Interscience (siehe S. 7, 10).
- Rudolph, J. (2003). *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Aachen: Shaker-Verlag (siehe S. 19).
- Tröltzsch, F. (2005). *Optimale steuerung partieller differentialgleichungen*. Wiesbaden: Vieweg (siehe S. 18).
- Whitham, G. (1999). *Linear and nonlinear waves*. New York: John Wiley & Sons (siehe S. 15).



## Kapitel 2

# Analyse und Synthese im Frequenzbereich

Frequenzbereichsmethoden haben sich für lineare, zeitinvariante Systeme als sehr leistungsfähige Analyse- und Entwurfswerkzeuge erwiesen. Da insbesondere die diesem Ansatz zugrunde liegende Laplace-Transformation nahezu unmittelbar auf verteilt-parametrische Systeme übertragen werden kann, ist es naheliegend eine entsprechende Entwurfssystematik für unendlich-dimensionale Systeme zu entwickeln. Diese ist Gegenstand dieses Kapitels mit dem Ziel, eine Einführung in die moderne und verallgemeinerte Analyse im Frequenzbereich zu geben.

### 2.1 Einführung in die Analyse im Frequenzbereich

Mittels der Laplace-Transformation

$$X(z, s) := \mathcal{L}\{x(z, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} x(z, t) dt \quad (2.1)$$

kann ein lineares, zeitinvariantes, inhomogenes Anfangs-Randwertproblem der Form

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n_t} \alpha_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} x(z, t)}_{= D_t x(z, t)} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n_z} \beta_j \frac{\partial^j}{\partial z^j} x(z, t)}_{= D_z x(z, t)} = u(z, t), \quad z \in (0, L), \quad t > 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial^j x}{\partial t^j}(z, 0) = x_{0,j}(z), \quad z \in [0, L], \quad j = 0, 1, \dots, n_t - 1 \quad (2.2b)$$

$$\underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n_z-1} \gamma_{k,j}^0 \frac{\partial^k}{\partial z^k} x(z, t) \right) \Big|_{z=0}}_{= R_{z,j}^0 x(z, t)} = u_j^0(t), \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_z^0 \quad (2.2c)$$

$$\underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n_z-1} \gamma_{k,j}^L \frac{\partial^k}{\partial z^k} x(z, t) \right) \Big|_{z=L}}_{= R_{z,j}^L x(z, t)} = u_j^L(t), \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_z^L \quad (2.2d)$$

mit  $n_z^0 + n_z^L = n_z$  in ein lineares, inhomogenes, örtliches Randwertproblem überführt werden. Gemäß (2.1), muss die Transformation in der halb-unendlichen (Zeit-) Koordinate  $t \in [0, \infty)$  erfolgen. Mit den bekannten Eigenschaften der Laplace-Transformation ergibt sich schließlich das Randwertproblem

$$D_z X(z, s) + \sum_{j=1}^{n_t} \alpha_j s^j X(z, s) = U(z, s) + \sum_{j=1}^{n_t} \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} x_i(z), \quad z \in (0, L). \quad (2.3)$$

Des Weiteren liefert die Anwendung der Laplace-Transformation auf (2.2c), (2.2d) die entsprechenden Randbedingungen im Bildbereich der Laplace-Transformation

$$R_{z,j}^0 X(z, s)|_{z=0} = U_j^0(s), \quad j = 1, 2, \dots, n_z^0 \quad (2.4)$$

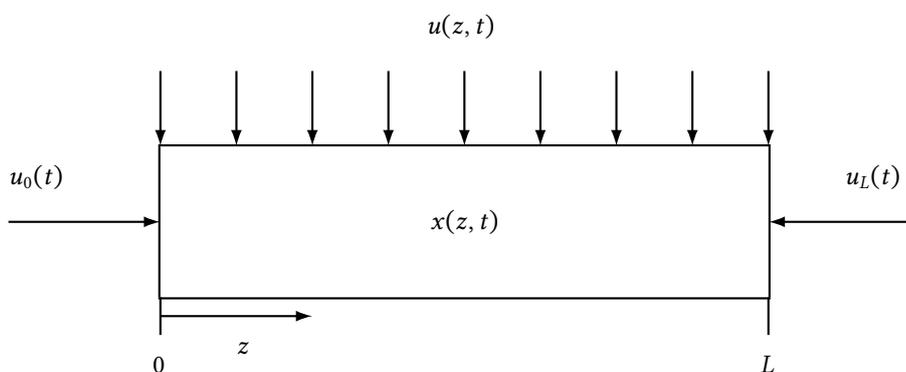
$$R_{z,j}^L X(z, s)|_{z=L} = U_j^L(s), \quad j = 1, 2, \dots, n_z^L. \quad (2.5)$$

Zur Lösung dieser örtlichen Randwertaufgabe (2.3)–(2.5) existieren verschiedene Ansätze:

- direkt, z.B. mittels geeigneter Ansatzfunktionen ( $\exp(\lambda z)$ -Ansatz);
- Modale Transformation;
- Greensche Funktion.

Im Folgenden wird beispielhaft die Anwendung der Laplace-Transformation zur Analyse von verteilt-parametrischen Systemen gezeigt. Hierzu werden die Wärmeleitungsgleichung als Beispiel einer parabolischen PDgl. und die so genannte Transportgleichung als Beispiel einer hyperbolischen PDgl. betrachtet. Für eine Zusammenfassung der wesentlichen Eigenschaften und Korrespondenzen der Laplace-Transformation wird auf Anhang A verwiesen.

**Beispiel 2.1 (Aufheizvorgang eines Wärmeleiters).** Der wichtigste Repräsentant der Ausgleichsprozesse ist die Wärmeleitung.



Für die Wahl  $n_t = 1$  und  $n_z = 2$  mit  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 0$  sowie  $\beta_2 = -a$ ,  $a > 0$ , beschreibt die PDgl. (2.2a) den Aufheizvorgang in dem oben abgebildeten Wärmeleiter mit der Temperaturverteilung  $x(z, t)$  gemäß

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = u(z, t), \quad z \in (0, L), t > 0. \quad (2.6)$$

Der Wärmeleiter befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in einem stationären Zustand, so dass o.B.d.A. ein homogenes Anfangsprofil

$$x(z, 0) = x_0(z) \equiv 0, \quad z \in [0, L] \quad (2.7)$$

angenommen werden kann. An den Rändern  $z \in \{0, L\}$  werden über  $u_0(t)$  und  $u_L(t)$  direkt die Randwerte  $x(0, t)$  und  $x(L, t)$  vorgegeben

$$x(0, t) = u_0(t), \quad x(L, t) = u_L(t), \quad t > 0, \quad (2.8)$$

weshalb  $\gamma_0^0 = \gamma_0^L = 1$  und  $\gamma_1^0 = \gamma_1^L = 0$ . Die Anwendung der Laplace-Transformation führt auf

$$sX(z, s) - a \frac{d^2 X(z, s)}{dz^2} = U(z, s), \quad z \in (0, L) \quad (2.9)$$

$$X(0, s) = U_0(s), \quad X(L, s) = U_L(s). \quad (2.10)$$

Im Folgenden wird vereinfachend  $U(z, s) \equiv 0$  angenommen, so dass sich mittels des Lösungsansatzes

$$X(z, s) = A(s) \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} z + B(s) \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} z$$

die allgemeine Lösung zu

$$X(z, s) = \underbrace{\frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}(L-z)}{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}L}}_{=: G_0(z, s)} U_0(s) + \underbrace{\frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}z}{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}L}}_{=: G_L(z, s)} U_L(s) \quad (2.11)$$

in Abhängigkeit von den beiden transzendenten ortsabhängigen Übertragungsfunktionen  $G_0(z, s)$  und  $G_L(z, s)$  ergibt. Die Lösung im Zeitbereich ergibt sich mittels des Faltungssatzes zu

$$\begin{aligned} x(z, t) &= \int_0^t g_0(z, t-\tau) u_0(\tau) d\tau + \int_0^t g_L(z, t-\tau) u_L(\tau) d\tau \\ &= g_0(z, t) * u_0(t) + g_L(z, t) * u_L(t). \end{aligned}$$

Dabei sind die inversen Übertragungsfunktionen  $g_0(z, t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_0(z, s)\}$  und  $g_L(z, t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_L(z, s)\}$  beispielsweise mittels des **Residuensatzes** zu ermitteln. Anhand des eingeschlagenen Lösungsweges können weitere Eigenschaften des betrachteten Systems ermittelt werden:

- **Stationäre Lösung:** Aus dem Endwertsatz der Laplace-Transformation ergibt sich, dass

$$x_S(z) = x(z, t \rightarrow \infty) \overset{\circ}{\sim} \lim_{s \rightarrow 0} sX(z, s) \text{ für } \lim_{s \rightarrow 0} sU_{0,L}(s) = \bar{u}_{0,L} = \text{konst.}$$

Mit (2.11) folgt somit

$$x(z, t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \underbrace{\frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}(L-z)}{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}L}}_{\rightarrow \frac{0}{0}} sU_0(s) + \underbrace{\frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}z}{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}L}}_{\rightarrow \frac{0}{0}} sU_L(s) \right\} \stackrel{l'Hospital}{=} \bar{u}_0 + \frac{z}{L}(\bar{u}_L - \bar{u}_0).$$

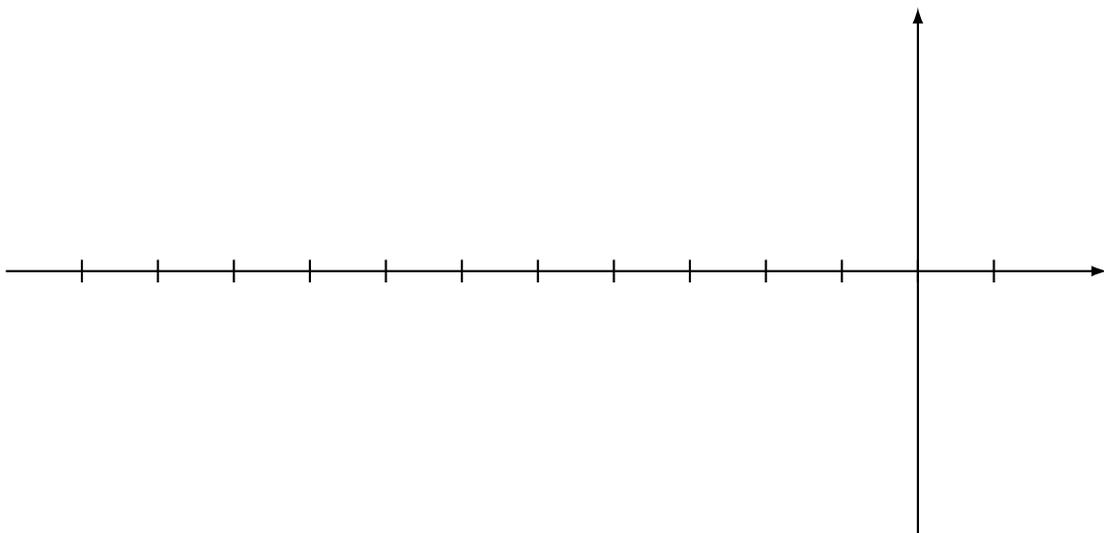
- **Polstellen der Übertragungsfunktion:** Nach (2.11) ergeben sich die Polstellen  $s_k$  der Übertragungsfunktionen  $G_0(z, s)$  und  $G_L(z, s)$  aus

$$\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}L = 0 = \Im \sin \sqrt{\frac{s}{a}} \frac{L}{i} \Rightarrow \sqrt{\frac{s}{a}} \frac{L}{i} = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

bzw.

$$s_k = -a \left( \frac{k\pi}{L} \right)^2, \quad k = (0), 1, \dots$$

Offensichtlich ergibt sich für den betrachteten Wärmeleiter ein  $\infty$ -dimensionales Polspektrum, wobei, wie in Kapitel 3 gezeigt wird, wegen  $\Re\{s_k\} < 0$  exponentielle Stabilität gewährleistet ist.



- **Rücktransformation und Lösungseigenschaften:** Die Inversion der Laplace-Transformation  $x(z, t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(z, s)\}$  mittels des **Residuensatzes** erfordert die Entwicklung der Übertragungsfunktionen  $G_0(z, s)$  und  $G_L(z, s)$  um die  $\infty$ -vielen Polstellen  $s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Dies führt zur Lösung  $x(z, t)$  in Form einer Reihe

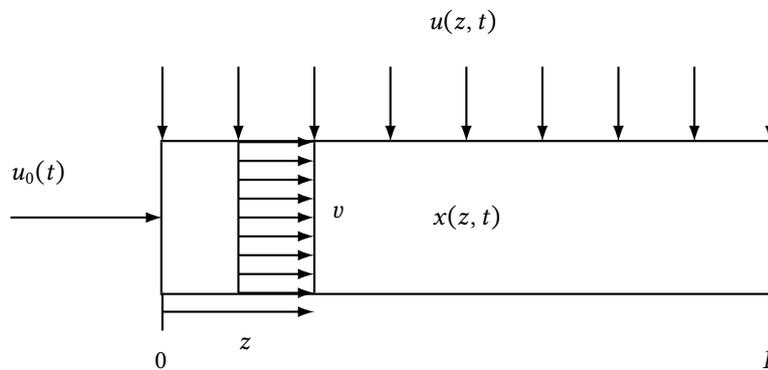
$$x(z, t) = g_0(z, t) * u_0(t) + g_L(z, t) * u_L(t)$$

mit

$$g_0(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi(-1)^{k+1}}{L^2} e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}(L-z)\right)$$

$$g_L(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi(-1)^{k+1}}{L^2} e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi z}{L}\right).$$

**Beispiel 2.2 (Strömungssystem).** Als weiteres Beispiel wird ein von einem inkompressiblen Medium durchströmtes Rohr betrachtet.



Hierbei stellen  $x(z, t)$  beispielsweise die Temperatur des Mediums dar,  $u(z, t)$  die einstellbare Temperatur der Rohrwand und  $v$  die axiale Strömungs-Geschwindigkeit. Eine Energiebilanzierung über ein differentielles Volumelement führt zur Beschreibung des Vorganges in Form eines SVPn entsprechend (2.2a)–(2.2d), d.h.

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = u(z, t), \quad z \in (0, L), \quad t > 0$$

$$x(0, t) = u_0(t) \quad t > 0$$

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad z \in [0, L].$$

Die Anwendung der Laplace-Transformation führt auf das inhomogene Randwertproblem

$$sX(z, s) + v \frac{dX(z, s)}{dz} = U(z, s) + x_0(z), \quad z \in (0, L)$$

$$X(0, s) = U_0(s).$$

für die Laplace-Transformierte  $X(z, s)$ . Die Lösung dieser Aufgabe kann allgemein als

$$X(z, s) = \underbrace{U_0(s)e^{-\frac{s}{v}z}}_{\text{Randeingriff}} + \underbrace{\frac{1}{v} \int_0^z U(\zeta, s) e^{-\frac{s}{v}(z-\zeta)} d\zeta}_{\text{verteilter Eingriff}} + \underbrace{\frac{1}{v} \int_0^z x_0(\zeta) e^{-\frac{s}{v}(z-\zeta)} d\zeta}_{\text{AB}} \quad (2.12)$$

angegeben werden, mit den einzelnen Einflüssen von dem Randeingriff, dem verteiltem Eingriff und der AB. Unter der Annahme, dass  $x_0(z) \equiv 0$ , vereinfacht sich (2.12) zu

$$X(z, s) = U_0(s)e^{-\frac{s}{v}z} + \frac{1}{v} \int_0^z U(\zeta, s) e^{-\frac{s}{v}(z-\zeta)} d\zeta \quad (2.13)$$

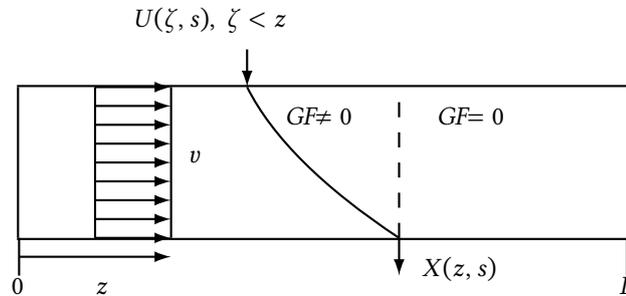
mit den Übertragungsfunktionen

- $G_0(z, s) = \frac{X(z, s)}{U_0(s)} = e^{-\frac{s}{v}z}$  entsprechend einer **ortsabhängigen Totzeit**  $T_i(z) = \frac{z}{v}$

- $\int_0^z U(\zeta, s) \frac{e^{-\frac{s}{v}(z-\zeta)}}{v} d\zeta = \int_0^L G(z, \zeta, s) U(\zeta, s) d\zeta$  mit der so genannten **Greenschen Funktion (GF)**

$$G(z, \zeta, s) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{-\frac{(z-\zeta)}{v}s}, & \zeta \leq z \\ 0, & \zeta > z. \end{cases}$$

Diese verdeutlicht insbesondere den Einflussbereich des verteilten Eingriffs  $U(z, s)$  auf die Lösung  $X(z, s)$  an einem fixierten Punkt  $z \in [0, L]$ :



Anhand des Lösungsweges über die Laplace-Transformierte können weitere Eigenschaften des betrachteten Systems ermittelt werden. Hierzu wird

$$y(t) = x(L, t)$$

als Ausgang des Systems betrachtet. Des Weiteren wird  $u(z, t) = u(t)$  als orts-konstant angenommen. Im Bildbereich der Laplace-Transformation ergibt sich somit mit (2.13)

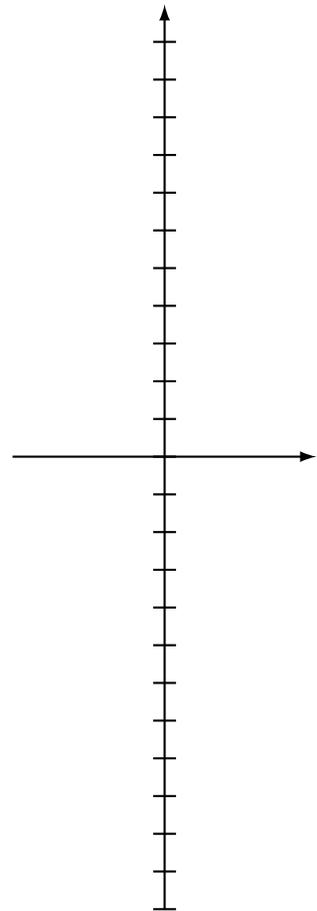
$$Y(s) = \underbrace{e^{-sT_t}}_{= G_0(s)} U_0(s) + \underbrace{\frac{1}{s} (1 - e^{-sT_t})}_{= G_1(s)} U(s), \quad T_t = \frac{L}{v}.$$

Diesem Ausdruck entspricht im Zeitbereich

$$y(t) = u_0(t - T_t)\sigma(t - T_t) + \int_0^t (u(\tau) - u(\tau - T_t))\sigma(\tau - T_t) d\tau.$$

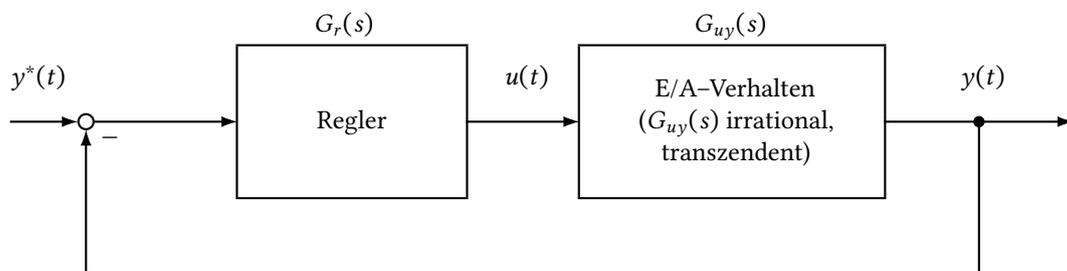
- **Pol-/Nullstellen von  $G_0(s) = e^{-sT_t}$**

- **Pol-/Nullstellen für verteilten Eingriff**



## 2.2 Regelungsentwurf mittels Ausgangsrückführung

Zur Illustration wird im Folgenden der Regelungsentwurf für skalare ortsdiskrete bzw. punktwise verteilte Stell- und Regelgrößen mittels **Ausgangsrückführung** wie untenstehend abgebildet untersucht. Im Bildbereich der



**Abb. 2.1:** Regelkreis mit Ausgangsrückführung: Regler  $G_r(s)$  und Übertragungsfunktion  $G_{uy}(s)$ .

Laplace-Transformation ergibt sich die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises zu

$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} Y^*(s)$$

wobei  $G_0(s) = G_{uy}(s)G_r(s)$  die Übertragungsfunktion des offenen Kreises beschreibt und  $Y^*(s)$  die Laplace-Transformierte des gewünschten Ausgangsverhaltens  $y^*(t)$  angibt. In Analogie zum Entwurf für endlichdimensionale lineare Systeme wird zum Entwurf des Reglers  $G_r(s)$  bzw. zum Nachweis der Stabilität des geschlossenen Regelkreises das Konzept der **Eingangs-Ausgangs-Stabilität bzw. „Bounded Input Bounded Output“-Stabilität bzw.  $L^\infty$ -Stabilität** herangezogen. Aufgrund der auftretenden irrationalen bzw. transzendenten Übertragungsfunktion  $G_{uy}(s)$  sind hierbei jedoch einige Modifikationen des zugrundeliegenden mathematischen Konzepts erforderlich.

## 2.3 Eingangs-Ausgangs-Stabilität verteilt-parametrischer SISO Systeme

Die folgende Definition der Eingangs-Ausgangs-Stabilität (E/A-Stabilität) erfolgt entsprechend den Ausführungen in Vidyasagar, 2002, S. 277f. Hierzu sind zunächst einige mathematische Grundlagen erforderlich, die im Weiteren kurz zusammengefasst werden.

### 2.3.1 Mathematische Grundlagen

Neben den „klassischen“  $L^p$ -Räumen

- $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue messbar, } \|f\|_p < \infty\}$  mit der Norm  $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$  für  $1 \leq p < \infty$ ,
- $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue messbar, } \|f\|_\infty < \infty\}$  mit der Norm  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{\Omega} |f|$

können entsprechend Vidyasagar, 2002 **erweiterte  $L^p$ -Räume** definiert werden. Hierzu sei  $\Omega = [0, \infty)$  womit sich die so genannte **abgeschnittene Funktion** wie folgt definieren lässt.

**Definition 2.1**

Sei  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Für jedes  $T \in \mathbb{R}^+$  wird die Funktion  $f_T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T \end{cases}$$

als abgeschnittene Funktion von  $f(t)$  im Intervall  $[0, T]$  bezeichnet.

Dies erlaubt die Einführung erweiterter  $L^p$ -Räume gemäß

- $L^{pe}([0, \infty)) = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \mid f_T \in L^p \forall T < \infty\}$ ,

womit offensichtlich gilt, dass  $L^p \subset L^{pe}$ .

**Beispiel 2.3.** Sei  $f(t) = t$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ .



Der Zusammenhang zwischen  $L^p([0, \infty))$  und  $L^{pe}([0, \infty))$  ist dabei im folgenden Lemma zusammengefasst. Es ist hierbei zu beachten, **dass nur  $L^p$ , jedoch nicht  $L^{pe}$ , einen normierten linearen Vektorraum definiert.**

**Lemma 2.1: (Vidyasagar, 2002, S. 274)**

Für jedes  $p \in [1, \infty]$  stellt  $L^{pe}$  einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$  dar. Dabei gilt für jedes feste  $p$  und  $f \in L^{pe}$ , dass (i)  $\|f_T\|_p$  eine nichtabnehmende Funktion in  $T$  ist und (ii)  $f \in L^p$  genau dann, wenn ein  $m$  mit  $0 < m < \infty$  existiert, so dass  $\|f_T\|_p \leq m$ ,  $\forall T \geq 0$ . In diesem Fall gilt  $\|f\|_p = \lim_{T \rightarrow \infty} \|f_T\|_p$ .

Zur Definition der E/A-Stabilität muss eine **Verknüpfung zwischen der Eingangs- und Ausgangsgröße hergestellt werden**. Hierzu können **Relationen zwischen Mengenelementen** herangezogen werden. Eine binäre Relation  $R$  ist somit die Teilmenge eines kartesischen Produkts zweier Mengen  $M_1$  und  $M_2$ :

$$R \subseteq M_1 \times M_2 := \{(a_1, a_2) \mid (a_1 \in M_1) \wedge (a_2 \in M_2)\}.$$

Sei  $A : M_1 \rightarrow M_2$  eine Abbildung. Dann **definiert**  $A$  eine **binäre Relation**  $R_A$  **der Form**  $R_A := \{(a_1, Aa_1) | a_1 \in M_1\}$ . Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht. Mit diesen Ergebnissen kann nun der Begriff der  $L^p$ -**Stabilität** eingeführt werden:

**Definition 2.2:  $L^p$ -Stabilität**

Sei  $R$  eine binäre Relation auf  $L^{pe}$ .

- (i) Die Relation  $R$  wird  $L^p$ -**stabil** genannt, wenn aus  $(f, g) \in R$  mit  $f \in L^p$  folgt, dass  $g \in L^p$ .
- (ii) Die Relation  $R$  wird  $L^p$ -**stabil mit endlicher Verstärkung ohne Offset** genannt wenn  $R$   $L^p$ -stabil ist und ein konstantes  $\gamma_p < \infty$  existiert, so dass aus  $(f, g) \in R$  mit  $f \in L^p$ ,  $\|g\|_p \leq \gamma_p \|f\|_p$  folgt.

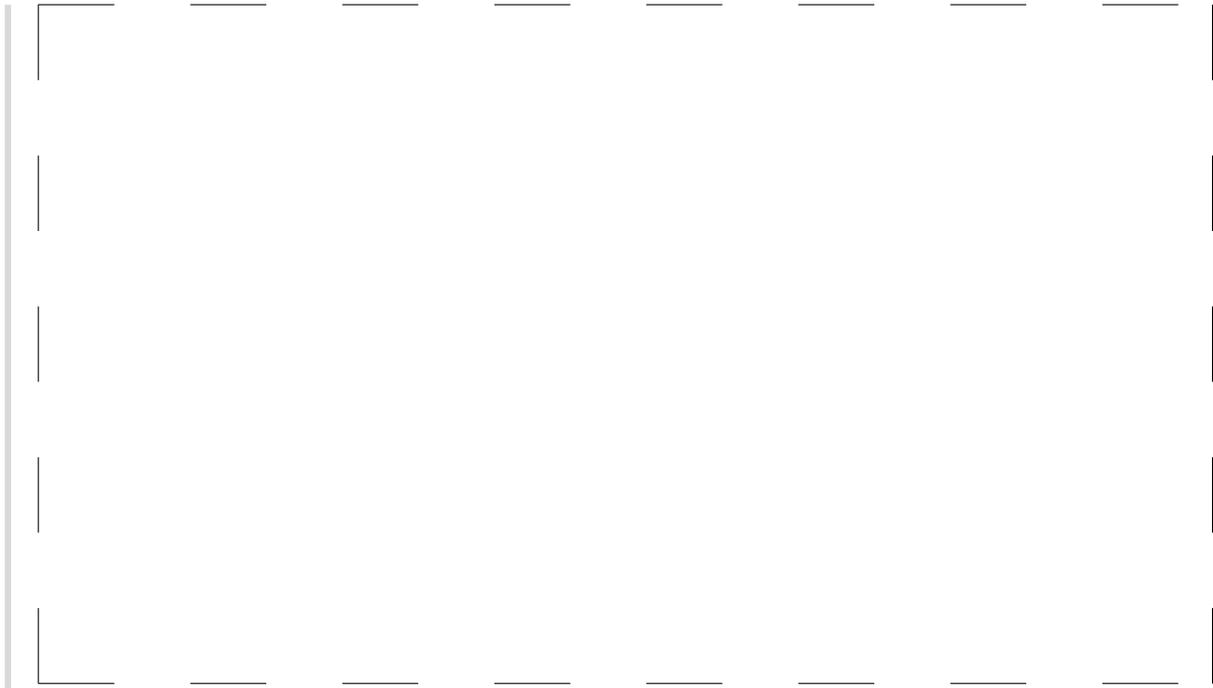
Übertragen auf die durch eine Abbildung  $A$  induzierte Relation  $R_A$  führt dies zu folgender Definition der  $L^p$ -Stabilität der Abbildung  $A$ .

**Definition 2.3**

Sei  $A : L^{pe} \rightarrow L^{pe}$  eine Abbildung. Die Abbildung  $A$  wird  $L^p$ -**stabil (mit endlicher Verstärkung ohne Offset)** genannt, wenn die induzierte Relation  $R_A$  auf  $L^{pe}$  entsprechend  $L^p$ -stabil (mit endlicher Verstärkung ohne Offset) ist.

Eine Eingangs-Ausgangsabbildung, die  $L^\infty$ -stabil mit endlicher Verstärkung ohne Offset ist, wird auch **E/A-stabil** genannt.

**Beispiel 2.4.** Betrachtet wird die Abbildung  $(Af)(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau$ .



### 2.3.2 Eingangs–Ausgangs–Stabilität des offenen Regelkreises

Ausgehend von den obigen Betrachtungen wird im Folgenden die Stabilität des in Abbildung 2.2 dargestellten offenen Regelkreises analysiert.

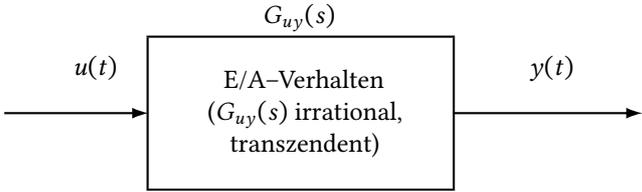


Abb. 2.2: Offener Regelkreis mit Übertragungsfunktion  $G_{uy}(s)$ .

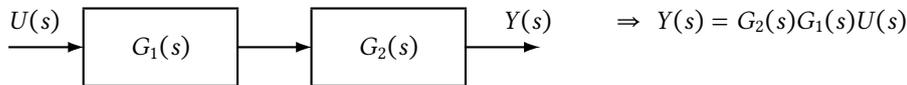
Im Fall einer **rationalen Übertragungsfunktion**  $G_{uy}(s)$  folgt die E/A–Stabilität genau dann, wenn die Impulsantwort  $g_{uy}(t) \in L^1([0, \infty))$  bzw. wenn

- (i)  $G_{uy}(s)$  proper ist und
- (ii) alle Pole von  $G_{uy}(s)$  negativen Realteil aufweisen.

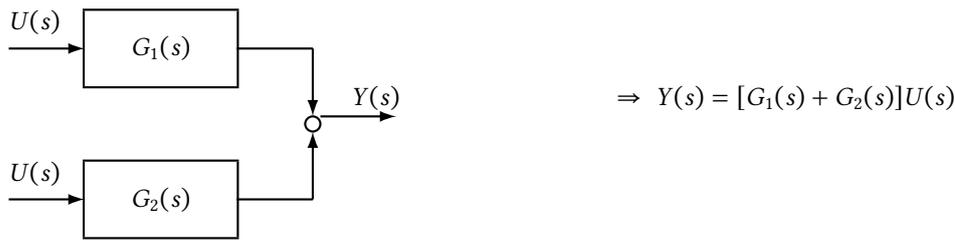
Diese Schlussfolgerung kann im Fall irrationaler Übertragungsfunktionen, wie sie beispielsweise bei SVPn auftreten, im Allgemeinen nicht mehr gezogen werden. Andererseits erlaubt die Analyse des Eingangs–Ausgangsverhaltens eine im Prinzip direkte Übertragung der wohl bekannten  $L^p$ – bzw. E/A–Stabilitätsresultate für endlich–dimensionale Systeme auf verteilt–parametrische Systeme, d.h. beide Systemklassen können in einem einheitlichen Rahmen untersucht werden.

Hierzu sind jedoch einige mathematische Ergänzungen erforderlich, deren Notwendigkeit sich direkt aus den möglichen Konfigurationen von Übertragungsfunktionen ableiten lässt. Im Speziellen sind dies die

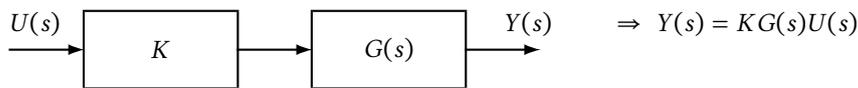
- Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen (**Multiplikation**)



- Parallelschaltung von Übertragungsfunktionen (**Addition**)



- Verstärkung (**Skalarmultiplikation**)



- Rückführung (**Algebraische Inverse**)

Entsprechend Abbildung 2.1  $\Rightarrow Y(s) = [1 + G_r(s)G_{uy}(s)]^{-1}G_r(s)G_{uy}(s)Y^*(s)$ .

Offensichtlich muss also die Klasse der Übertragungsfunktionen eine **Algebra** bilden, um sämtliche algebraischen Operation in zulässiger Weise durchzuführen. Da insbesondere auch die entsprechenden inversen Laplace-Transformierten, d.h. die entsprechenden Zeitsignale, von Interesse sind, müssen den Operationen der Multiplikation, Addition und Skalarmultiplikation entsprechende Operationen im Zeitbereich gegenüberstehen. Um diese Forderungen zu erfüllen, werden im Folgenden die **Funktionensmengen  $\mathcal{A}(\beta)$  bzw.  $\hat{\mathcal{A}}(\beta)$**  definiert werden, die, wie im Weiteren gezeigt wird, für  $\beta = 0$  der **Menge der E/A-stabilen Impulsantworten bzw. deren Laplace-Transformierten** entsprechen.

#### Definition 2.4

Sei  $\beta \in \mathbb{R}$ .  $\mathcal{A}(\beta)$  bezeichnet die Menge aller generalisierten Funktionen (Distributionen)  $f(t)$  der Form

$$f(t) = \begin{cases} f_a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \delta(t - t_n), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

wobei  $t_n \in [0, \infty)$  mit  $t_1 = 0$ ,  $t_n < t_{n+1}$ ,  $f_n \in \mathbb{C}$ , Delta-Distribution  $\delta(t - t_n)$  zentriert in  $t_n$ ,  $e^{-\beta t} f_a(t) \in L^1([0, \infty))$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| e^{-\beta t_n} < \infty$ .

Die Norm  $\|f\|_{\mathcal{A}(\beta)}$  einer Distribution in  $\mathcal{A}(\beta)$  wird hierbei durch

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{A}(\beta)} = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} |f_a(t)| dt + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| e^{-\beta t_n} \quad (2.15)$$

definiert. Des Weiteren wird die Faltung zweier Distributionen  $f, g \in \mathcal{A}(\beta)$  entsprechend

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (2.16)$$

definiert. Für  $\beta = 0$  schreiben wir  $\mathcal{A}$  anstelle von  $\mathcal{A}(0)$ .

Die Notwendigkeit, Distributionen mittels (2.15) in die Menge  $\mathcal{A}(\beta)$  zu integrieren, kann leicht wie folgt motiviert werden.

Es kann gezeigt werden, dass  $\mathcal{A}(\beta)$  **eine kommutative Banach–Algebra mit Einselement unter der in (2.15) definierten Norm** darstellt, d.h. (a)  $\mathcal{A}(\beta)$  definiert einen Banach–Raum mit der Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(\beta)}$  und (b)  $\mathcal{A}(\beta)$  ist eine kommutative Algebra bzgl. der in (2.16) definierten Faltung.

#### Anmerkung 2.1

Zum Nachweis, dass  $\mathcal{A}(\beta)$  eine kommutative Banach–Algebra mit Einselement unter der in (2.15) definierten Norm darstellt, sind zu zeigen, dass:

1.  $\mathcal{A}(\beta)$  ein linearer Vektorraum über dem Grundkörper  $\mathbb{C}$  ist,  
 $\Rightarrow$  Verknüpfung von (punktweiser) Addition und Skalarmultiplikation
2.  $\mathcal{A}(\beta)$  ein Ring ist,  
 $\Rightarrow$  Verknüpfung von Addition und Multiplikation  
 $\Rightarrow$  Mit 1 ist zu zeigen, dass die Addition in  $\mathcal{A}(\beta)$  kommutativ ist, die Multiplikation in  $\mathcal{A}(\beta)$  assoziativ ist und Multiplikation und Addition in  $\mathcal{A}(\beta)$  distributiv sind
3. die Multiplikation und Skalarmultiplikation in  $\mathcal{A}(\beta)$  kommutativ sind
4. eine Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(\beta)}$  in  $\mathcal{A}(\beta)$  existiert mit  $\|f \star g\|_{\mathcal{A}(\beta)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\beta)} \|g\|_{\mathcal{A}(\beta)}, \forall f, g \in \mathcal{A}(\beta)$   
 $\Rightarrow$  Beschränktheit etc.

Aus 1–3 folgt, dass  $\mathcal{A}(\beta)$  eine **Algebra** ist. Mit 4 folgt, dass  $\mathcal{A}(\beta)$  eine **Banach–Algebra** ist. Die Multiplikation ist kommutativ, d.h.  $f \star g = g \star f$  für alle  $f, g \in \mathcal{A}(\beta)$ . Damit wird  $\mathcal{A}(\beta)$  zu einer **kommutativen Banach–Algebra**.

Des Weiteren gelten die folgenden Aussagen, deren Beweis beispielsweise in Curtain und Zwart, 1995 oder in Vidyasagar, 2002 für  $\beta = 0$  zu finden ist.

**Lemma 2.2**

$\mathcal{A}(\beta)$  ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(\beta)}$  und der Faltungsoperation  $\star$  weist die folgenden Eigenschaften auf

- (i)  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(\beta)}$  definiert eine Norm auf  $\mathcal{A}(\beta)$  und  $\mathcal{A}(\beta)$  ist **vollständig** bzgl. dieser Norm.
- (ii) Die Faltung ist kommutativ, d.h.  $f \star g = g \star f, \forall f, g \in \mathcal{A}$ .
- (iii) Die Faltung ist bilinear, d.h.

$$\begin{aligned} f \star (\alpha g) &= \alpha(f \star g), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{A}(\beta), \\ f \star (g + h) &= f \star g + f \star h, \quad \forall f, g, h \in \mathcal{A}(\beta). \end{aligned}$$

- (iv) Für alle  $f, g \in \mathcal{A}(\beta)$  gilt  $f \star g \in \mathcal{A}(\beta)$  mit  $\|f \star g\|_{\mathcal{A}(\beta)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\beta)} \|g\|_{\mathcal{A}(\beta)}$ .
- (v) Die Delta-Distribution  $\delta(\cdot)$  ist das Einselement in  $\mathcal{A}(\beta)$ , d.h.  $\delta \star f = f \star \delta = f, \forall f \in \mathcal{A}(\beta)$ .
- (vi)  $\mathcal{A}(\beta)$  ist nullteilerfrei, d.h.  $f \star g = 0 \Rightarrow f \equiv 0$  oder  $g \equiv 0$ .

Sei nun  $f \in \mathcal{A}(\beta)$ , dann gilt für  $\Re\{s\} > \beta$  mit  $e^{-\beta t} f_a(t) \in L^1([0, \infty))$  sowie  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| e^{-\beta t_n} < \infty$ , dass

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f_a(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \delta(t - t_n) e^{-st} dt = F_a(s) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-st_n} = F(s).$$

In anderen Worten, **alle Elemente von  $\mathcal{A}(\beta)$  sind Laplace-transformierbar** und das **Existenzgebiet der Laplace-Transformation umfasst die offene Menge  $\mathbb{C}_{\beta}^+ := \{s \in \mathbb{C} | \Re\{s\} > \beta\}$** . Im Folgenden wird mit  $\hat{\mathcal{A}}(\beta) = \{F | f \in \mathcal{A}(\beta)\}$  die Menge der Laplace-Transformierten der Elemente  $f \in \mathcal{A}(\beta)$  bezeichnet. Für  $\beta = 0$  schreiben wir  $\hat{\mathcal{A}}$  anstelle von  $\hat{\mathcal{A}}(0)$ . Offensichtlich erfüllen  $\mathcal{A}(\beta)$  bzw.  $\hat{\mathcal{A}}(\beta)$  die einleitend gestellten Anforderungen an die zulässigen Übertragungsfunktionen und deren Laplace-Transformierten.

Es ist wohl bekannt, dass ein lineares zeit-invariantes endlich-dimensionales SISO-System genau dann E/A-stabil ist, wenn die Impulsantwort absolut integrierbar ist, also in  $L^1([0, \infty))$  liegt. Wie im Weiteren gezeigt wird, kann dieses Ergebnis direkt auf den Fall irrationaler Übertragungsfunktionen übertragen werden. Hierzu ist jedoch eine Erweiterung der Menge  $\mathcal{A}(\beta)$  notwendig, wobei die Bedingung  $e^{-\beta t} f_a(t) \in L^1([0, \infty))$  abgeschwächt wird.

**Definition 2.5**

Die Erweiterung  $\mathcal{A}_e(\beta)$  von  $\mathcal{A}(\beta)$  bezeichnet die Menge aller generalisierten Funktionen  $f(t)$  deren abgeschnittene Funktion  $f_T(t) \in \mathcal{A}(\beta), \forall T < \infty$ . Für  $\beta = 0$  schreiben wir  $\mathcal{A}_e$  anstelle von  $\mathcal{A}_e(0)$ .

Die Menge  $\mathcal{A}_e(\beta)$  weist sehr nützliche Eigenschaften auf, da insbesondere bzgl. eines festen  $\beta$  auch Funktionen  $f(t)$  zulässig werden, die  $e^{-\beta t} f(t) \in L^1([0, T])$  nur für beliebige endliche  $T \geq 0$  erfüllen. Im Fall  $\beta = 0$  bedeutet dies, dass auch **instabile Übertragungsfunktionen** als Elemente von  $\mathcal{A}_e$  aufgefasst werden können. Beispielsweise gilt  $e^t \in \mathcal{A}_e$  da  $\int_0^T |e^t| dt = e^T - 1$  für jedes finite  $T \geq 0$  Element von  $\mathcal{A}$  ist.

**Satz 2.1: E/A-Stabilität anhand der Impulsantwort**

Sei der Operator  $(Hf)(t) = h \star f$  mit  $h \in \mathcal{A}_e$  gegeben. Dann sind äquivalent

- (i)  $H$  ist E/A-stabil.
- (ii)  $h \in \mathcal{A}$ .

*Beweis.* Der Nachweis erfolgt in zwei Schritten:

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei  $h \in \mathcal{A}$  und  $f \in L^{\infty}([0, \infty))$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(Hf)(t)\|_{\infty} &= \left\| \int_0^t h(\tau) f(t - \tau) d\tau \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| \int_0^t h_a(\tau) f(t - \tau) d\tau \right\|_{\infty} + \left\| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} h_n \delta(\tau - t_n) f(t - \tau) d\tau \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \operatorname{ess\,sup}_t \left( \sum_{n=1}^{\infty} |h_n| |f(t - t_n)| + \int_0^t |h_a(\tau)| |f(t - \tau)| d\tau \right) \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)| \left( \sum_{n=1}^{\infty} |h_n| + \int_0^{\infty} |h_a(\tau)| d\tau \right) = \|h\|_{\mathcal{A}} \|f\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Somit gilt  $\|(Hf)(t)\|_{\infty} \leq \gamma_{\infty} \|f\|_{\infty}$  mit  $\gamma_{\infty} = \|h\|_{\mathcal{A}} < \infty$  woraus die E/A-Stabilität von  $H$  folgt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Der Beweis erfolgt über Kontraposition, d.h. es ist zu zeigen  $h \notin \mathcal{A} \Rightarrow H$  ist nicht E/A-stabil. Vereinfachend wird hierzu angenommen, dass  $h_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $h(t) = h_a(t)$ . Da  $h(t) \notin \mathcal{A}$  folgt direkt, dass  $\int_0^t |h(t - \tau)| d\tau$  unbeschränkt ist. Es wird gezeigt, dass für ein  $f \in L^{\infty}([0, \infty))$  mit  $\|f\|_{\infty} = 1$ , die Abbildung  $(Hf)(t)$  unbeschränkt ist. Mit  $f(\tau) = \operatorname{sign}(h(t - \tau))$  für  $\tau \in [0, t]$  folgt

$$(Hf)(t) = \int_0^t h(t - \tau) \operatorname{sign}(h(t - \tau)) d\tau = \int_0^t |h(t - \tau)| d\tau.$$

Der Grenzübergang  $t \rightarrow \infty$  zeigt direkt, dass  $(Hf)(t)$  unbeschränkt ist und somit nicht E/A-stabil. Der allgemeine Fall mit  $h_n \neq 0$  folgt in ähnlicher Weise.  $\square$

Offensichtlich ergibt sich **im Fall irrationaler Übertragungsfunktionen der Klasse  $\mathcal{A}$  eine unmittelbare Analogie zum Fall rationaler Übertragungsfunktionen**, womit die Analyse der E/A-Stabilität für lineare endlich-dimensionale Systeme und unendlich-dimensionale verteilt-parametrische Systeme in einem einheitlichen Rahmen (allerdings wie im Folgenden gezeigt wird, mit gewissen Modifikationen) analysiert werden kann. Es stellen sich nun die Fragen der Übertragung dieser Ergebnisse auf den geschlossenen Regelkreis sowie die Ermittlung geeigneter Kriterien zum möglichst einfachen und direkten Nachweis der E/A-Stabilität für ein gegebenes SVPn. Diese werden in den folgenden Abschnitten beantwortet.

### 2.3.3 Eingangs-Ausgangs-Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Im Folgenden wird die E/A-Stabilität des in Abbildung 2.1 dargestellten geschlossenen Regelkreises analysiert. Da diese Struktur eine Substruktur der in Abbildung 1.10 gezeigten 2FHG-Struktur darstellt, soll im Folgenden direkt deren E/A-Stabilität untersucht werden. Die 2FHG-Struktur kann hierzu leicht in die folgende Darstellung (Abbildung 2.3) überführt werden, wobei  $Y^*(s)$  und  $U^*(s)$  die Laplace-Transformierten der Solltrajektorie und Vorsteuerung repräsentieren,  $\Delta U(s)$  den Rückführanteil am Stellsignal  $E_1(s) = U(s)$  beschreibt, der sich durch Vergleich  $E_2(s) = Y^*(s) - Y(s)$  von Ausgangssignal  $Y(s)$  und Sollwert  $Y^*(s)$  und Gewichtung mit der Reglerübertragungsfunktion  $G_r(s)$  ergibt. Die Übertragungsmatrix  $M(s)$  zwischen  $[E_1(s), E_2(s)]^T$  und  $[Y^*(s), U^*(s)]^T$

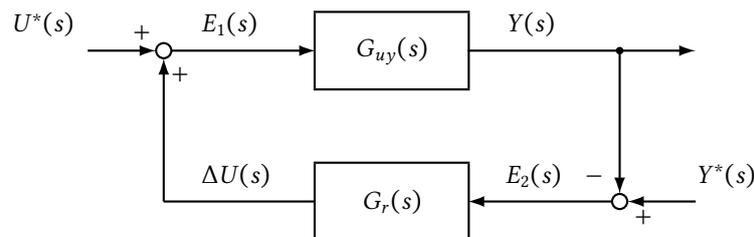


Abb. 2.3: 2FHG-Regelkreisstruktur mit Ausgangsrückführung  $G_r(s)$ .

ergibt sich somit aus

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} &= \underbrace{\frac{1}{1 + G_r(s)G_{uy}(s)} \begin{bmatrix} G_r(s) & 1 \\ 1 & -G_{uy}(s) \end{bmatrix}}_{=: M(s)} \begin{bmatrix} Y^*(s) \\ U^*(s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wie im obigen Abschnitt gezeigt wurde, wird die E/A-Stabilität des geschlossenen Regelkreises durch die Forderung  $M(s) \in \hat{\mathcal{A}}^{2 \times 2}$  erreicht. Es kann insbesondere leicht folgendes Lemma gezeigt werden.

**Lemma 2.3**

Für  $G_{uy}(s), G_r(s) \in \hat{\mathcal{A}}$  sind äquivalent

(i)  $M(s) \in \hat{\mathcal{A}}^{2 \times 2}$

(ii)  $\frac{1}{1 + G_r(s)G_{uy}(s)} \in \hat{\mathcal{A}}$ .

*Beweis.* Der Nachweis erfolgt in zwei Schritten:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei  $M(s) \in \hat{\mathcal{A}}^{2 \times 2}$ . Dann gilt insbesondere  $M_{i,j}(s) \in \hat{\mathcal{A}}, i, j = 1, 2$  und speziell folgt aus  $M_{2,1}(s)$ , dass  $\frac{1}{1 + G_r(s)G_{uy}(s)} \in \hat{\mathcal{A}}$ .

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei  $\frac{1}{1 + G_r(s)G_{uy}(s)} \in \hat{\mathcal{A}}$ . Mit  $M_{1,2}(s) = \frac{1}{1 + G_r(s)G_{uy}(s)} = M_{2,1}(s), M_{1,1}(s) = G_r(s)\frac{1}{1 + G_r(s)G_{uy}(s)}$  sowie  $M_{2,2}(s) = G_{uy}(s)\frac{1}{1 + G_r(s)G_{uy}(s)}$  folgt direkt, dass  $M_{i,j}(s) \in \hat{\mathcal{A}}, i, j = 1, 2$ .  $\square$

Zum eigentlichen Nachweis der Bedingung  $[1 + G_r(s)G_{uy}(s)]^{-1} \in \hat{\mathcal{A}}$  erweist sich das untenstehende Theorem als essentiell.

**Satz 2.2**

Sei  $F(s) \in \hat{\mathcal{A}}(\beta)$ .  $F(s)$  ist genau dann invertierbar über  $\hat{\mathcal{A}}(\beta)$ , d.h.  $F^{-1}(s) \in \hat{\mathcal{A}}(\beta)$ , wenn

$$\inf_{\Re\{s\} \geq \beta} |F(s)| > 0. \tag{2.18}$$

Der Beweis dieser Aussage ist u.a. in Hille und Phillips, 1957, Theorem 4.18.6 zu finden. In der Literatur wird diese Forderung oft auch als „**bounded away from zero over**  $\overline{\mathcal{C}}_\beta^+ := \{s \in \mathbb{C} | \Re\{s\} \geq \beta\}$ ” bezeichnet.

Offensichtlich folgt somit für  $G_{uy}(s) \in \hat{\mathcal{A}}$  (Strecke ist E/A–stabil) und  $G_r(s) \in \hat{\mathcal{A}}$  (Regler ist E/A–stabil) die E/A–Stabilität des geschlossenen Kreises (2.17) genau dann, wenn

$$\inf_{\Re\{s\} \geq 0} |1 + G_r(s)G_{uy}(s)| > 0. \tag{2.19}$$

Da jedoch die Forderung nach E/A–Stabilität der Strecke die Anwendbarkeit dieses Resultates stark einschränkt, sind im Hinblick auf die Analyse instabiler Übertragungsfunktionen  $G_{uy}(s)$  weitere Modifikationen erforderlich. Hierzu wird sowohl in Curtain und Zwart, 1995 als auch in Vidyasagar, 2002 folgender Satz bewiesen, der instabile Anteile von  $G_{uy}(s)$  in Form von rationalen Übertragungsfunktionen als zulässig einführt.

**Satz 2.3**

Sei  $G_{uy}(s)$  als

$$G_{uy}(s) = G_{uy}^a(s) + G_{uy}^r(s) \tag{2.20}$$

gegeben mit  $G_{uy}^a(s) \in \hat{\mathcal{A}}$  und rationalem, strikt properem  $G_{uy}^r(s)$ . Die sich so ergebende Übertragungsmatrix  $M(s)$  aus (2.17) ist genau dann Element von  $\hat{\mathcal{A}}^{2 \times 2}$  wenn (2.19) erfüllt ist.

Der Beweis dieses Satzes ist eher technischer Natur, so dass auf die genannte Literatur verwiesen wird. Andererseits kann hieraus ein **Nyquist–Kriterium** zur graphischen Stabilitätsanalyse abgeleitet werden.

Im Fall rationaler Übertragungsfunktionen ist es hierbei ausreichend, die Abbildung der imaginären Achse  $i\omega, \omega \in \mathbb{R}$  durch die Übertragungsfunktion zu untersuchen. Für irrationale Übertragungsfunktionen ist dies im Allgemeinen nicht direkt möglich, da für  $|\omega| \rightarrow \infty$  nicht notwendigerweise ein Grenzwert der Abbildung ermittelbar sein muss (vgl.  $G_{uy}(s) = G(s)e^{-sT}, G(s) \in \hat{\mathcal{A}}$ ). Somit ist es naheliegend, dass ein Nyquist–Kriterium zum Nachweis der E/A–Stabilität im Fall irrationaler Übertragungsfunktionen neben einer Phasenbedingung eine weitere, im Prinzip aus (2.19) ableitbare, Bedingung erfüllen muss. Speziell gilt das im Folgenden behandelte Stabilitätskriterium, wobei die Übertragungsfunktion  $G_r(s)$  des Reglers ebenfalls in der Form (2.20) darstellbar sein muss, d.h.  $G_r(s) = G_{r,a}(s) + G_{r,r}(s)$  mit  $G_{r,a}(s) \in \hat{\mathcal{A}}$  und rationalem, strikt properem Anteil  $G_{r,r}(s)$ . Zu dessen Formulierung wird zusätzlich der Begriff des **Nyquist–Pfades**  $\bar{N}_\infty$  benötigt. Dieser bezeichnet die Kontour die sich in der komplexen  $s$ –Ebene ergibt, wenn die  $i\omega$ –Achse von  $\omega = -\infty$  bis  $\omega = \infty$  durchlaufen wird, wobei die ggf. vorhandenen Polstellen der Übertragungsfunktion  $G_r(s)G_{uy}(s)$  des offenen Regelkreises auf der  $i\omega$ –Achse durch

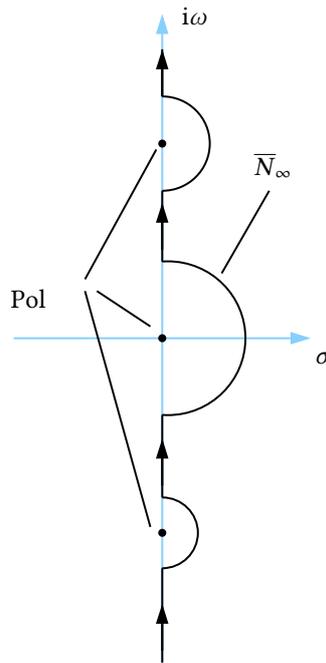


Abb. 2.4: Beispiel für einen Nyquist-Pfad im Fall von 3 Polstellen auf der imaginären Achse.

einen (infinitesimal kleinen) Halbkreis in  $\overline{\mathbb{C}_0^+}$  umlaufen werden (vgl. Abbildung 2.4). Mit diesen Vorbemerkungen kann nun der untenstehende Satz für verteilt-parametrische SISO-Systeme formuliert werden:

**Satz 2.4: Nyquist-Stabilitätstest**

Seien  $G_{uy}(s)$  und  $G_r(s)$  in der Form (2.20) gegeben. Die Übertragungsmatrix  $M(s)$  aus (2.17) ist genau dann Element von  $\hat{\mathcal{A}}^{2 \times 2}$  wenn

- (i)  $1 + G_r(s)G_{uy}(s) \neq 0, \forall s \in \overline{N_\infty}$  und
- (ii)  $(1 + G_r(s)G_{uy}(s))|_{s \in \overline{N_\infty}}$  den Ursprung  $p_+$ -fach im Gegenuhrzeigersinn umläuft, wobei  $p_+$  die Anzahl der (isolierten) Polstellen des offenen Regelkreises  $G_r(s)G_{uy}(s)$  in der rechten offenen komplexen Halbebene bezeichnet, d.h.

$$\text{ind}(1 + G_r(s)G_{uy}(s)) = p_+$$

mit den so genannten Nyquist index

$$\text{ind}(G(s)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\arg(G(i\omega)|_{\omega \in \overline{N_\infty}}) - \arg(G(-i\omega)|_{\omega \in \overline{N_\infty}})].$$

Der Beweis dieses Satzes ist beispielsweise in Desoer und Wang, 1980, Theorem D1 für  $G_r(s) = K$  oder in Curtain und Zwart, 1995, Theorem 9.1.8 für allgemeine  $G_r(s)$  zu finden. Weitere interessante Anmerkungen und die Analyse gewisser Spezialfälle sind zudem in Desoer und Vidyasagar, 1975, S. 92f zu finden. Die Anwendung dieses Satzes wird in den folgenden Beispielen illustriert.

**Beispiel 2.5 (Randregelung des Aufheizvorgangs eines Wärmeleiters).** Der Aufheizvorgang eines Wärmeleiters mit der Temperaturverteilung  $x(z, t)$  wird durch die homogene PDgl.

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad z \in (0, L), t > 0. \tag{2.21}$$

beschrieben. Die AB wird ebenfalls homogen gewählt, d.h.

$$x(z, 0) = x_0(z) \equiv 0, \quad z \in [0, L] \tag{2.22}$$

Als Stellgröße wird die Temperatur am linken Rand an  $z = 0$  aufgefasst und es wird angenommen, dass der rechte Rand des Wärmeleiters ideal isoliert sei. Somit ergeben sich die RBn zu

$$x(0, t) = u(t), \quad \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.23)$$

Analog zu den Ausführungen in Kapitel 2.1 liefert die Anwendung der Laplace-Transformation die Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$\frac{X(z, s)}{U(s)} = G_{ux}(z, s) = \frac{\cosh(\sqrt{s}(L - z))}{\cosh(\sqrt{s}L)}.$$

Als Ausgangs- bzw. Regelgröße  $y(t)$  wird die Temperatur  $x(\zeta, t)$  an einer diskreten Stelle  $\zeta \in (0, L]$  gewählt

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_{ux}(\zeta, s) = \frac{\cosh(\sqrt{s}(L - \zeta))}{\cosh(\sqrt{s}L)} =: G_{uy}(s).$$

Die Regelung soll durch einen klassischen P-Regler mit Verstärkungsfaktor  $K$  erfolgen, mit dem Ziel,  $Y(s)$  entlang  $Y^*(s)$  zu führen.

Die Anwendung von Satz 2.4 erfordert zunächst die Bestimmung der Anzahl  $p_+$  der Polstellen von  $G_{uy}(s)$  mit positivem Realteil. Den Ausführungen in Abschnitt 2.1 folgend kann leicht nachgewiesen werden, dass  $p_+ = 0$ . Des Weiteren ist leicht ersichtlich, dass der offene Regelkreis  $K G_{uy}(s)$  keine Polstellen auf der imaginären Achse aufweist, so dass in diesem Fall der Nyquist-Pfad  $\bar{N}_\infty$  der  $i\omega$ -Achse durchlaufen von  $\omega = -\infty$  nach  $\omega = \infty$  entspricht.

Die Abbildung der imaginären Achse  $s = i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  durch  $G_{uy}(s)$  kann nicht direkt ermittelt werden (Argument  $\sqrt{s}$  in cosh-Termen). Mittels der Substitution  $\sqrt{s} = a + ib$  bzw.  $s = a^2 - b^2 + i2ab$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  ergibt sich jedoch direkt wegen  $i\omega = a^2 - b^2 + i2ab$ , dass  $a = b$  und  $\omega = 2a^2$  bzw.  $a = \sqrt{\omega/2}$  für  $\omega \geq 0$ . Für  $\omega \in \mathbb{R}^-$  ergibt sich wie untenstehend gezeigt wird ein symmetrisches Ergebnis. Des Weiteren gilt

$$\cosh((a + ib)L) = \cosh(aL) \cos(bL) + i \sinh(aL) \sin(bL), \quad (2.24)$$

womit sich

$$G_{uy}(i\omega) = \frac{\cos(a(L - \zeta)) \cosh(a(L - \zeta)) + i \sin(a(L - \zeta)) \sinh(a(L - \zeta))}{\cos(aL) \cosh(aL) + i \sin(aL) \sinh(aL)}, \quad a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

ergibt. Wegen

$$(\cos(aL) \cosh(aL))^2 + (\sin(aL) \sinh(aL))^2 = \cos^2(aL) + \sinh^2(aL)$$

kann  $G_{uy}(s)$  in die folgende Form überführt werden

$$G_{uy}(i\omega) = \frac{Z(i\omega, \zeta)}{\cos^2(aL) + \sinh^2(aL)},$$

wobei  $Z(i\omega, \zeta)$  sämtliche Zählerterme zusammenfasst. Im Weiteren wird die Anwendung von Satz 2.4 zunächst für  $\zeta = L$  und dann für beliebiges  $\zeta \in (0, L)$  illustriert.

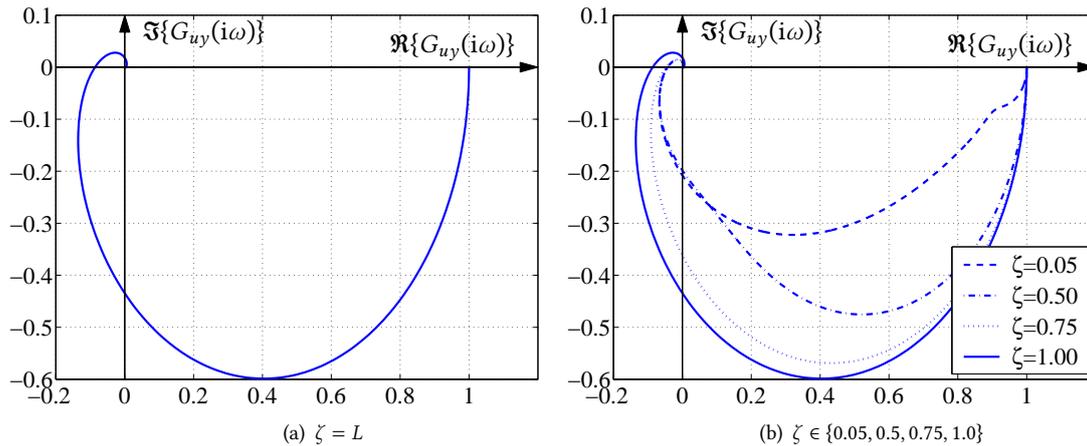
- **Sei  $\zeta = L$ :** In diesem Fall ergibt sich  $Z(i\omega, L) = \cos(aL) \cosh(aL) - i \sin(aL) \sinh(aL)$ . Das Verhalten von  $1 + K G_{uy}(i\omega)$  kann offensichtlich direkt aus der Darstellung von  $G_{uy}(i\omega)$  in der  $(\Re\{G_{uy}(i\omega)\}, \Im\{G_{uy}(i\omega)\})$ -Ebene bei Variation von  $\omega$  bzw.  $a$  abgeleitet werden (Multiplikation mit  $K$  und Verschiebung um 1 in Richtung der positiven  $\Re\{G_{uy}(i\omega)\}$ -Achse). Hierzu ist es hilfreich die Schnittpunkte von  $G_{uy}(i\omega)$  mit der  $\Re\{G_{uy}(i\omega)\}$ -Achse zu bestimmen. Da  $\cos^2(aL) + \sinh^2(aL) \neq 0$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ , folgen diese aus

$$\Im\{G_{uy}(i\omega)\} = \sin(aL) \sinh(aL) = 0 \Rightarrow a_k = \frac{k\pi}{L}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Entsprechend ergibt sich die Menge  $S_{\Re}$  der Schnittpunkte der Kurve  $G_{uy}(i\omega)$  mit der  $\Re\{G_{uy}(i\omega)\}$ -Achse zu

$$S_{\Re} := \left\{ \frac{(-1)^k \cosh(k\pi)}{1 + \sinh^2(k\pi)} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

Den Verlauf von  $G_{uy}(i\omega)$  zeigt Abbildung 2.5(a).



**Abb. 2.5:** Darstellung von  $G_{uy}(i\omega)$  für  $L = 1$  in der  $(\Re\{G_{uy}(i\omega)\}, \Im\{G_{uy}(i\omega)\})$ -Ebene bei Variation von  $a$  bzw.  $\omega$  für die angegebenen Werte von  $\zeta$ .

Der zulässige Wertebereich für  $K$  kann somit nun leicht gemäß Bedingung (i) aus Satz 2.4 ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 & -1 + K > 0 \Rightarrow K > -1 \\
 & -1 - \frac{K \cosh(k\pi)}{1 + \sinh^2(k\pi)} = 1 - \frac{K}{\cosh(\pi)} > 0 \Rightarrow K < \cosh(\pi) = 11.592.
 \end{aligned}$$

Zur Überprüfung des Falls  $\omega \in \mathbb{R}^-$  und der Phasenbedingung (ii) aus Satz 2.4 ist zu beachten, dass sich wegen  $s = -i\omega = a^2 - b^2 + i2ab$  und der Wahl  $a = -b = \sqrt{\omega/2}$ ,  $G_{uy}(-i\omega)$  zu

$$G_{uy}(-i\omega) = \frac{1}{\cos(aL) \cosh(aL) - i \sin(aL) \sinh(aL)}, \quad a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

errechnet. Hieraus folgt direkt, dass  $Z(i\omega, L) = \cos(aL) \cosh(aL) + i \sin(aL) \sinh(aL)$  womit sich  $G_{uy}(-i\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^+$  direkt aus Spiegelung der Kurve aus Abbildung 2.5 an der  $\Re\{G_{uy}(i\omega)\}$ -Achse ergibt, so dass Bedingung (i) aus Satz 2.4 für den ermittelten Wertebereich von  $K$  erfüllt ist.

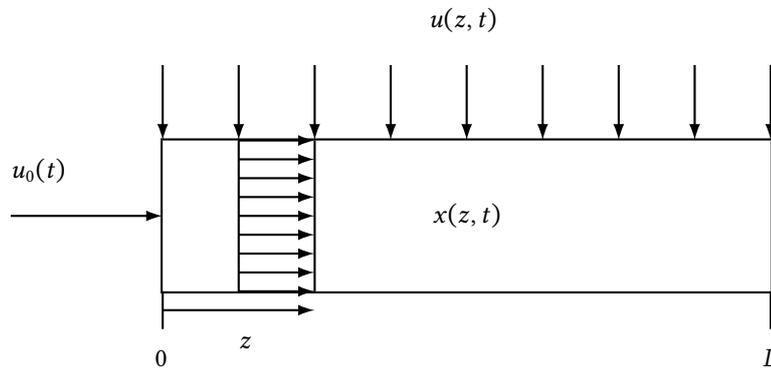
Des Weiteren ist Bedingung (ii) aus Satz 2.4 mit  $p_+ = 0$  unmittelbar für  $-1 < K < \cosh(\pi)$  erfüllt, da wegen der Symmetrie von  $G_{uy}(i\omega)$  die Ortskurve  $1 + KG_{uy}(i\omega)$  vollständig auf die rechte offene komplexe Halbebene beschränkt ist.

Zusammenfassend ergibt sich also, dass für alle  $-1 < K < \cosh(\pi)$  E/A-Stabilität gewährleistet werden kann.

- $\zeta \in (0, L)$ : In diesem Fall ist der analytische Nachweis wie im Fall  $\zeta = L$  aufgrund der Komplexität des Ausdrucks  $Z(i\omega, \zeta)$  nicht mehr unmittelbar möglich, weshalb ein graphischer Nachweis durch Darstellung von  $G_{uy}(i\omega)$  in der  $(\Re\{G_{uy}(i\omega)\}, \Im\{G_{uy}(i\omega)\})$ -Ebene verfolgt wird. Das grundlegende Prinzip entspricht jedoch direkt den obigen Ausführungen.

Hierzu zeigt Abbildung 2.5(b) den Verlauf von  $G_{uy}(i\omega)$  für  $L = 1$  und verschiedener Werte von  $\zeta = \{0.05, 0.5, 0.75, 1.0\}$  im Vergleich zum Verlauf für  $\zeta = L$ . Aus dem Schnittpunkt der Kurven mit der  $\Re\{G_{uy}(i\omega)\}$ -Achse ist leicht ersichtlich, dass für  $0 < \zeta < 1$  etwas größere Reglerverstärkungen zulässig sind. Des Weiteren gilt analog zu den obigen Ausführungen, dass die Phasenbedingung (ii) aus Satz 2.4 für die entsprechend ermittelten Wertebereiche von  $K$  direkt erfüllt ist, da die Ortskurve  $1 + KG_{uy}(i\omega)$  jeweils vollständig auf die rechte offene komplexe Halbebene beschränkt werden kann. Somit kann auch für den Fall  $\zeta \in (0, L)$  auf E/A-Stabilität geschlossen werden, falls  $K$  geeignet gewählt wird.

**Beispiel 2.6 (Randregelung eines Strömungssystems).** Als weiteres Beispiel wird der Randregelungsentwurf für ein von einem inkompressiblen Medium durchströmten Rohr untersucht.



Wie in Kapitel 2.2 gezeigt, ergibt sich für  $u(z, t) \equiv 0$ ,  $u_0(t) = u(t)$  und Ausgang  $y(t) = x(L, t)$  die Übertragungsfunktion an  $z = L$  im Bildbereich der Laplace-Transformation zu

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_{uy}(L, s) = e^{-sT_t}, \quad T_t = \frac{L}{v}.$$

Im Folgenden wird Satz 2.4 zum Nachweis der E/A-Stabilität des geschlossenen Regelkreises bei Verwendung eines P- als auch eines PI-Reglers untersucht. Dies erfordert zunächst die Bestimmung der Anzahl  $p_+$  der Polstellen von  $G_r(s)G_{uy}(s)$  mit positivem Realteil, wobei sich aus Abschnitt 2.2 ergibt, dass  $p_+ = 0$  ist.

- **P-Regler:** Da  $K G_{uy}(s)$  keine Polstelle auf der imaginären Achse aufweist, entspricht der Nyquist-Pfad genau der  $i\omega$ -Achse.

Mit  $G_r(s) = K$  folgt offensichtlich, dass

$$F(i\omega) := 1 + K G_{uy}(i\omega) = 1 + K \cos(\omega T_t) - iK \sin(\omega T_t).$$

Wegen  $F(-i\omega) = 1 + K \cos(\omega T_t) + iK \sin(\omega T_t)$  ist  $F(i\omega)$  **symmetrisch** zur  $\Re\{F(i\omega)\}$ -Achse, so dass es im Weiteren ausreichend ist, den Fall  $\omega \geq 0$  zu betrachten. Die Schnittpunkte von  $F(i\omega)$  mit der  $\Re\{F(i\omega)\}$ -Achse ergeben sich aus  $K \sin(\omega T_t) = 0$ , d.h. für  $\omega_k = \frac{k\pi}{T_t}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , zu

$$S_{\Re} = \left\{ 1 - K(-1)^k \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Der zulässige Wertebereich für  $K$  folgt somit aus den Bedingungen

$$1 + K > 0 \wedge 1 - K > 0$$

woraus sich  $-1 < K < 1$  ergibt. Für diese Werte liegen alle Schnittpunkte von  $F(i\omega)$  mit der  $\Re\{F(i\omega)\}$ -Achse in der rechten offenen komplexen Halbebene. Hieraus ist des Weiteren leicht ersichtlich, dass  $(1 + G_r(s)G_{uy}(s))|_{s=i\omega, \omega \in \mathbb{R}^+}$  den Ursprung nicht umläuft, womit die Bedingungen aus Satz 2.4 nachgewiesen sind.

- **PI-Regler:** Die Verwendung eines PI-Reglers  $G_r(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$  führt auf

$$F(s) = 1 + \left( K_P + \frac{K_I}{s} \right) G_{uy}(s).$$

Es gilt wiederum, dass  $p_+ = 0$ , d.h. es existieren keine Polstellen von  $G_r(s)G_{uy}(s)$  in der rechten offenen komplexen Halbebene. Aufgrund der Polstelle im Ursprung  $s = 0$  ist es jedoch erforderlich die „eingerrückte“ imaginäre Achse zu betrachten, d.h. der Nyquist-Pfad ergibt sich in diesem Fall zu

$$\bar{N}_{\infty} = (-i\infty, -i\epsilon) \cup \Gamma \cup (i\epsilon, i\infty)$$

mit  $\Gamma = \epsilon \exp(i\xi)$ ,  $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$  und  $\epsilon \ll 1$ . Für  $s \in (i\epsilon, i\infty)$  ergibt sich somit

$$F(i\omega) = \Re\{F(i\omega)\} + i\Im\{F(i\omega)\}$$

$$= 1 + K_P \cos(\omega T_t) - \frac{K_I}{\omega} \sin(\omega T_t) - i \left( K_P \sin(\omega T_t) + \frac{K_I}{\omega} \cos(\omega T_t) \right). \quad (2.25)$$

Offensichtlich ist  $F(i\omega)$  wegen  $F(-i\omega) = \Re\{F(i\omega)\} - i\Im\{F(i\omega)\}$  **symmetrisch** zur  $\Re\{F(i\omega)\}$ -Achse, weshalb sich die Ergebnisse für den Teilbereich  $s \in (-i\infty, -i\epsilon)$  direkt durch Spiegelung an der  $\Re\{F(i\omega)\}$ -Achse ergeben.

Die Analyse des Kurvenabschnitts  $s \in \Gamma^+ = \epsilon \exp(i\xi)$ ,  $\xi \in [0, \pi/2]$  kann wegen  $\epsilon \exp(i\xi) = \epsilon(\cos(\xi) + i \sin(\xi)) = a(\xi) + ib(\xi)$  durch die Auswertung von  $F(s) = F(a(\xi) + ib(\xi))$  erfolgen, d.h.

$$F(s) = 1 + e^{-a(\xi)T_t} \left( K_P \cos(b(\xi)T_t) + \frac{K_I}{\epsilon^2} [a(\xi) \cos(b(\xi)T_t) - b(\xi) \sin(b(\xi)T_t)] \right) - ie^{-a(\xi)T_t} \left( K_P \sin(b(\xi)T_t) + \frac{K_I}{\epsilon^2} [b(\xi) \cos(b(\xi)T_t) + a(\xi) \sin(b(\xi)T_t)] \right), \quad (2.26)$$

woraus wiederum leicht die Symmetrie zur  $\Re\{F(s)\}$ -Achse ersichtlich wird. Im Folgenden wird zunächst die E/A-Stabilisierung des Strömungssystem mit einem reinen I-Regler betrachtet.

- Fall  $K_P = 0$ : Die Menge der Schnittpunkte von (2.25) mit der  $\Re\{F(i\omega)\}$ -Achse ergibt sich in diesem Fall aus der Bedingung  $K_I \cos(\omega T_t) = 0$ , d.h.  $\omega_k = (2k - 1)\pi/(2T_t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , zu

$$S_{Re} = \left\{ 1 + \frac{K_I}{\omega_k} (-1)^k \mid k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Offensichtlich existieren aufgrund der Skalierung mit  $\omega_k$ ,  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots$  jeweils ein eindeutiges minimales und maximales Element. Aus der Forderung

$$1 - \frac{K_I}{\omega_1} > 0 \wedge 1 + \frac{K_I}{\omega_2} > 0$$

kann somit direkt der Wertebereich  $-\omega_2 < K_I < \omega_1$  bestimmt werden für den alle Schnittpunkte von  $F(i\omega)$ ,  $\omega \in (\epsilon, \infty)$  in der rechten offenen komplexen Halbebene liegen. Es stellt sich somit die Frage, ob dieser Wertebereich durch die Analyse des noch verbleibenden Kurvenzweiges (2.26) beeinflusst wird.

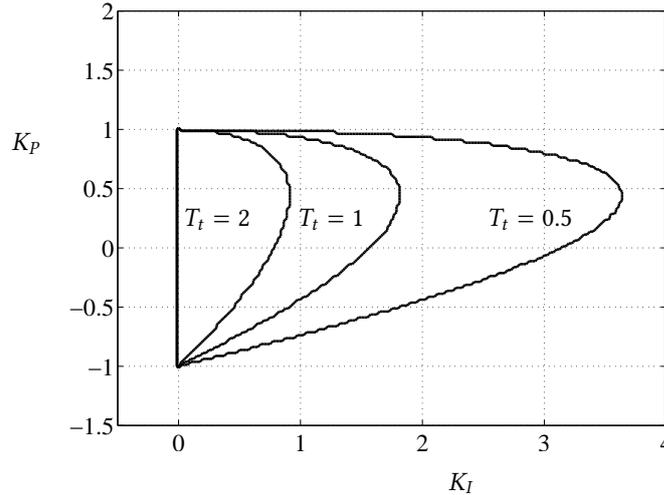
Speziell wird der Wertebereich für  $K_I$  verändert, wenn (2.26) neue Schnittpunkte von  $F(s)$  mit der  $\Re\{F(s)\}$ -Achse liefert, die außerhalb des Intervalls  $[1 - K_I/\omega_1, 1 + K_I/\omega_2]$  bzw.  $[1 + K_I/\omega_2, 1 - K_I/\omega_1]$  für  $K_I \geq 0$  bzw.  $K_I < 0$  liegen. Wegen  $a(\xi) \in [0, \epsilon]$  mit  $a(0) = \epsilon$ ,  $a(\pi/2) = 0$  und  $b(\xi) \in [0, \epsilon]$  mit  $b(0) = 0$ ,  $b(\pi/2) = \epsilon$  ist leicht ersichtlich, dass

$$\Im\{F(s)\} = 0 = b(\xi) \cos(b(\xi)T_t) + a(\xi) \sin(b(\xi)T_t)$$

nur für  $b(\xi) = 0$ , d.h.  $\xi = 0$ , erfüllt werden kann. Die Ortskurve  $F(s)$  weist somit einen weiteren Schnittpunkt mit der  $\Re\{F(s)\}$ -Achse an der Stelle  $1 + K_I \exp(-\epsilon T_t)/\epsilon$  auf. Aus der Forderung, dass dieser Schnittpunkt für alle  $\epsilon \ll 1$  in der rechten offenen komplexen Halbebene liegt ergibt sich die Bedingung  $K_I > -\epsilon e^{\epsilon T_t}$ ,  $\epsilon \ll 1$ , womit sich wegen  $-\epsilon \exp(\epsilon T_t) \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  der modifizierte Wertebereich zu  $0 \leq K_I < \pi/(2T_t)$  ergibt. Es ist hierbei zu beachten, dass  $\epsilon$  beliebig klein jedoch nicht identisch zu Null gewählt werden kann, weshalb  $\epsilon \exp(\epsilon T_t) \neq 0$ .

Entsprechend der obigen Analyse ist  $F(s)$ ,  $s \in \bar{N}_\infty$  für alle  $0 \leq K_I < \pi/(2T_t)$  auf die rechte offene komplexe Halbebene beschränkt, so dass die Phasenbedingung (ii) aus Satz 2.4 wegen  $p_+ = 0$  unmittelbar erfüllt ist.

- Fall  $K_P \neq 0$ : Die E/A-Stabilitätsanalyse ist im allgemeinen Fall mit  $K_P$ ,  $K_I \neq 0$  **nicht mehr vollständig analytisch** durchführbar. Jedoch kann mit Satz 2.4 und den Ortskurven (2.25) und (2.26) eine numerische Berechnung des zulässigen Parameterraumes  $(K_I, K_P)$  erfolgen. Exemplarisch zeigt Abbildung 2.6 die Parametergebiete in Abhängigkeit von  $T_t \in \{0.5, 1, 2\}$  für die E/A-Stabilität gewährleistet werden kann. Erwartungsgemäß schrumpft der zulässige Wertebereich bei einer Erhöhung der Totzeit  $T_t$ .



**Abb. 2.6:** Zulässige Parameterkombinationen  $(K_I, K_P)$  zur E/A-Stabilisierung des Strömungssystems mit einem *PI*-Regler bei Variation der Totzeit  $T_t \in \{0.5, 1, 2\}$ .

## 2.4 Algebraische Verallgemeinerungen

Ausgehend von obigen Ergebnissen zur E/A-Stabilität unendlich-dimensionaler Systeme werden in den folgenden Abschnitten einige Verallgemeinerungen und Erweiterungen anhand von SISO Übertragungsfunktionen gemäß (2.17) eingeführt.

### 2.4.1 Die Callier-Desoer Klasse

Im Weiteren wird skizziert, dass die zur Untersuchung der E/A-Stabilität herangezogene Klasse von Übertragungsfunktionen  $G_{uy}(s)$  gemäß (2.20), also solche, die sich als Summe von  $G_{uy}^a(s) \in \hat{\mathcal{A}}$  bzw.  $G_{uy}^a(s) \in \hat{\mathcal{A}}(\beta)$  und einer rationalen, strikt properen Übertragungsfunktion  $G_{uy}^r(s)$  darstellen lassen, besondere Eigenschaften aufweist. Hierzu werden zunächst zwei **Unteralgebren** von  $\hat{\mathcal{A}}(\beta)$  eingeführt.

#### Definition 2.6

Für die Unteralgebren  $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$  und  $\hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta)$  von  $\hat{\mathcal{A}}(\beta)$  gilt

- (i)  $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta) = \{F(s) \mid F(s) \in \hat{\mathcal{A}}(\beta_1) \text{ für ein } \beta_1 < \beta\}$
- (ii)  $\hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta) = \left\{ F(s) \in \hat{\mathcal{A}}_-(\beta) \mid \exists \rho > 0 \text{ so dass } \inf_{\{s \in \overline{\mathbb{C}}_\beta^+ \mid |s| \geq \rho\}} |F(s)| > 0 \right\}$ ,

wobei  $\overline{\mathbb{C}}_\beta^+ := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re\{s\} \geq \beta\}$ .

Die beiden Algebren  $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$  und  $\hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta)$  weisen einige interessante Eigenschaften auf Curtain und Zwart, 1995, S. 338, wobei für die weiteren Betrachtungen nur erwähnt werden soll, dass **jedes**  $F(s) \in \hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta)$  **nur endlich viele Nullstellen endlicher Ordnung in  $\overline{\mathbb{C}}_\beta^+$  besitzt**. Die Nützlichkeit dieser Eigenschaft wird offensichtlich in der folgenden Definition der so genannten **Callier-Desoer Klasse**.

#### Definition 2.7: Callier-Desoer Klasse (Curtain und Zwart, 1995, S. 340)

Die Callier-Desoer Klasse  $\hat{\mathcal{B}}(\beta)$  von Übertragungsfunktionen wird für alle  $\beta \in \mathbb{R}$  definiert als die Menge

$$\hat{\mathcal{B}}(\beta) := \hat{\mathcal{A}}_-(\beta) [\hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta)]^{-1} = \{F(s) = N(s)D^{-1}(s) \mid N(s) \in \hat{\mathcal{A}}_-(\beta) \text{ und } D(s) \in \hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta)\}. \quad (2.27)$$

Vidyasagar, 2002 liefert eine äquivalente Definition ohne die Bezeichnung „Callier-Desoer Klasse“ zu verwenden.

Einige wichtige Eigenschaften von  $\hat{B}(\beta)$  sind untenstehend zusammengefasst.

**Lemma 2.4**

Für  $F(s) \in \hat{B}(\beta)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  gilt

- (i)  $F(s)$  ist meromorph in  $\overline{\mathbb{C}}_{\beta_1}^+$  für ein  $\beta_1 < \beta$  und **besitzt nur endlich viele Polstellen endlicher Ordnung in  $\overline{\mathbb{C}}_{\beta}^+$** .
- (ii)  $\hat{B}(\beta)$  definiert eine **kommutative Algebra** bzgl. der Operationen Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation, d.h. für  $F_1(s), F_2(s) \in \hat{B}(\beta)$ ,  $K \in \mathbb{C}$  gilt  $F_1(s) \pm F_2(s) \in \hat{B}(\beta)$ ,  $F_1(s)F_2(s) \in \hat{B}(\beta)$ ,  $KF_1(s) \in \hat{B}(\beta)$ .

Offensichtlich werden durch die 1. Eigenschaft alle Übertragungsfunktionen ausgeschlossen, die unendlich viele Pole in  $\overline{\mathbb{C}}_{\beta}^+$  aufweisen.

**Beispiel 2.7 (Lineare Wellengleichung).** Die lineare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad z \in (0, L), t > 0 \tag{2.28}$$

beschreibt beispielsweise das dynamische Verhalten einer Torsionswelle. Hierbei beschreibt  $x(z, t)$  den Torsionswinkel und  $c = \sqrt{G/\mu}$  die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, wobei  $G$  das Schubmodul und  $\mu$  die Dichte des Wellenmaterials bezeichnen. Es wird angenommen, dass der Torsionswinkel an  $z = 0$  durch den Eingang  $u(t)$  vorgegeben wird, wohingegen das Ende  $z = L$  frei sein soll, d.h.

$$x(0, t) = u(t), \quad \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.29}$$

Das System befinde sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe und sei unausgelenkt

$$x(z, 0) = \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = 0, \quad z \in [0, L]. \tag{2.30}$$

Im Weiteren wird  $y(t) = x(L, t)$  als Ausgang aufgefasst und vereinfachend  $c = 1$  angenommen, so dass sich die Übertragungsfunktion zu

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\cosh(sL)} =: G_{uy}(s) \tag{2.31}$$

ergibt. Durch Substitution von  $s = ia$ ,  $a \in \mathbb{R}$  folgen die Polstellen von (2.31) wegen  $\cosh(ia) = \cos(a)$  zu

$$s_k^p = i \frac{(2k-1)\pi}{2L}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es existieren **unendlich viele einfache isolierte Polstellen entlang der imaginären Achse**, so dass wegen Lemma 2.4 (i) offensichtlich  $G_{uy}(s) \notin \hat{B}(\beta)$  für jedes  $\beta \leq 0$ .

Ausgehend von obiger Definition und den genannten Eigenschaften von  $\hat{B}(\beta)$  kann folgender Satz bewiesen werden, der den direkten Zusammenhang mit der im vorangegangenen Abschnitt betrachteten Klasse von Übertragungsfunktionen (2.20) liefert.

**Satz 2.5**

Eine Funktion  $F(s)$  ist genau dann Element der Callier–Desoer Klasse  $\hat{B}(\beta)$ , wenn gilt

$$F(s) = F^a(s) + F^r(s)$$

mit  $F^a(s) \in \hat{A}_-(\beta)$  und  $F^r(s)$  als eine streng rationale Übertragungsfunktion mit allen Polstellen in  $\overline{\mathbb{C}}_{\beta}^+$ .

Der Beweis ist in Curtain und Zwart, 1995, S. 347 zu finden. Somit kann für alle Elemente der Klasse  $\hat{B}(\beta)$  der Nachweis des E/A–Stabilität direkt mittels des graphischen Stabilitätstests aus Satz 2.4 erfolgen. Dies ist insbe-

sondere von Interesse, da der Nachweis, dass eine Übertragungsfunktion Element von  $\hat{\mathcal{B}}(\beta)$  ist, im Allgemeinen einfacher durchzuführen ist, als der direkte Nachweis der Form (2.20). Andererseits ist zu betonen, dass nicht jede Funktion der Form (2.20) mit den dort getroffenen Voraussetzungen ( $G_{uy}^a(s)$  bzw. in obiger Notation  $F^a(s) \in \hat{\mathcal{A}}$  oder verallgemeinert  $F^a(s) \in \hat{\mathcal{A}}(\beta)$ ) Element von  $\hat{\mathcal{B}}(\beta)$  ist. Dies ist leicht einsichtig, da in Satz 2.5 die strengere Forderung nach  $F^a(s) \in \hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$  gestellt wird und  $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta) \subset \hat{\mathcal{A}}(\beta)$ .

## 2.4.2 Teilerfremde Faktorisierungen

Ausgehend von den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts kann des Weiteren folgender Satz zur **Faktorisierung** von Elementen der Callier–Desoer Klasse bewiesen werden.

### Satz 2.6

Jedes Element  $F(s) \in \hat{\mathcal{B}}(\beta)$  besitzt eine Faktorisierung  $F(s) = N(s)D(s)^{-1}$  mit  $N(s) \in \hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$ ,  $D(s) \in \hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta)$ , wobei das Paar  $(N(s), D(s))$  **teilerfremd** in  $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$  ist.

Teilerfremd wird im betrachteten Fall transzendenter bzw. irrationaler Übertragungsfunktionen über die **Bezout-Identität** definiert.

### Definition 2.8: Teilerfremd in $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$

Das Paar  $(N(s), D(s)) \in \hat{\mathcal{A}}_-(\beta) \times \hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$  wird als teilerfremd in  $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$  bezeichnet, falls  $V(s), W(s) \in \hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$  existieren, so dass die Bezout-Identität

$$(V(s)N(s) - W(s)D(s)) = 1 \quad s \in \overline{\mathbb{C}}_\beta^+$$

erfüllt wird.

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium zur Teilerfremdheit ergibt sich wie folgt (Curtain und Zwart, 1995, S. 344).

### Lemma 2.5

Das Paar  $(N(s), D(s))$  ist **genau dann teilerfremd in  $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$** , wenn gilt

$$\inf_{s \in \overline{\mathbb{C}}_\beta^+} (|N(s)| + |D(s)|) > 0.$$

**Beispiel 2.8 (Lineare Wellengleichung (kont.)).** Wie in Beispiel 2.7 gezeigt gilt  $G_{uy}(s) \notin \hat{\mathcal{B}}(\beta)$  mit  $G_{uy}(s)$  aus (2.31). Andererseits gilt

$$G_{uy}(s) = \frac{1}{\cosh(sL)} = \frac{2e^{-sL}}{1 + e^{-2sL}},$$

wobei das Paar  $(2e^{-sL}, 1 + e^{-2sL})$  eine teilerfremde Faktorisierung von  $G_{uy}(s)$  gemäß Definition 2.8 repräsentiert (Nachweis: Wähle  $V(s) = -e^{-sL}/2$ ,  $W(s) = -1$ ).

Diese Ergebnisse sind geeignet, ein zumindest theoretisches Äquivalent zur **Youla-Parametrierung** im Fall rationaler Übertragungsfunktionen bzw. -matrizen, d.h. zur Parametrierung aller ein gegebenes System stabilisierenden Rückführungen, für den Fall irrationaler Übertragungsfunktionen bzw. -matrizen zu gewinnen – siehe hierzu die Ausführungen in Curtain und Zwart, 1995. Es ist jedoch zu betonen, dass diese Ergebnisse im Allgemeinen weder konstruktiv noch implementierbar sind.

Andererseits bietet der Faktorisierungsansatz eine direkte Möglichkeit zum Nachweis der E/A-Stabilität des in Abbildung 2.3 betrachteten Systems. Hierbei kann die folgende **notwendige und hinreichende Bedingung für die E/A-Stabilität des geschlossenen Regelkreises** bewiesen werden.

### Satz 2.7

Seien die Paare  $(N_r(s), D_r(s))$  bzw.  $(N_{uy}(s), D_{uy}(s))$  teilerfremde Faktorisierungen von  $G_r(s)$  bzw.  $G_{uy}(s)$ . Dann sind äquivalent

(i)  $M(s)$  aus (2.17) ist Element von  $\hat{\mathcal{A}}^{2 \times 2}$ .

(ii)  $\inf_{\Re\{s\} \geq 0} |N_{uy}(s)N_r(s) + D_{uy}(s)D_r(s)| > 0$ .

Der Beweis ist in verallgemeinerter Form in Vidyasagar, 2002, S. 331f zu finden.

**Beispiel 2.9 (Lineare Wellengleichung (kont.)).** In Beispiel 2.8 wurde gezeigt, dass das Paar  $(2e^{-sL}, 1 + e^{-2sL})$  eine teilerfremde Faktorisierung von  $G_{uy}(s)$  aus (2.31) darstellt.

- Sei nun  $G_r(s) = K$  (P-Regler), so folgt aus Satz 2.7, dass  $\inf_{\Re\{s\} \geq 0} |2e^{-sL}K + 1 + e^{-2sL}| > 0$  für E/A-Stabilität gelten muss. Es kann nun leicht gezeigt werden, dass für jedes  $K \in \mathbb{R}$  ein  $s_0 \in \mathbb{C}$  mit  $\Re\{s_0\} > 0$  so existiert, dass

$$e^{-2s_0L} + 2Ke^{-s_0L} + 1 = 0.$$

Insbesondere folgt  $s_0$  aus  $e^{-s_0L} = -K \pm \sqrt{K^2 - 1}$ .

- Sei nun  $G_r(s) = -e^{-sL}/2$ . Dann gilt

$$N_{uy}(s)N_r(s) + D_{uy}(s)D_r(s) = 1$$

woraus direkt die E/A-Stabilität des geschlossenen Regelkreises gemäß Abbildung 2.3 folgt.

**Aufgabe 2.1.** Zeigen Sie, dass gilt  $G_{uy}(s) \in \hat{\mathcal{B}}(0)$  mit  $G_{uy}(s)$  der Übertragungsfunktion aus **Aufgabe 3.1**. Bestimmen Sie zudem eine teilerfremde Faktorisierung von  $G_{uy}(s)$ .

**Aufgabe 2.2.** Zeigen Sie, dass gilt  $G_{uy}(s) \in \hat{\mathcal{B}}(0)$  mit  $G_{uy}(s)$  der Übertragungsfunktion aus **Aufgabe 3.3**.

### 2.4.3 Eingangs–Ausgangs–Stabilität verteilt–parametrischer MIMO Systeme

Die Methoden zum Nachweis der BIBO–Stabilität für verteilt–parametrische SISO Systeme sind im Prinzip direkt auf den MIMO Fall erweiterbar. Allerdings erfordert dies analog zum Fall linearer zeitinvarianter endlich–dimensionaler Systeme einige, zum Teil aufwendige, mathematische Modifikationen. Der interessierte Leser wird deshalb auf die Lehrbücher Curtain und Zwart, 1995, Vidyasagar, 2002 und Desoer und Vidyasagar, 1975 sowie die dortigen Referenzen verwiesen.

## Literatur

- Curtain, R. und H. Zwart (1995). *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Texts in applied mathematics 21. New York: Springer-Verlag (siehe S. 36, 39, 40, 45–48).
- Desoer, C. und M. Vidyasagar (1975). *Feedback systems: Input-Output properties*. New York: Academic Press (siehe S. 40, 48).
- Desoer, C. und Y.-T. Wang (1980). „On the generalized nyquist stability criterion“. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 25.2, S. 187–196 (siehe S. 40).
- Hille, E. und R. Phillips (1957). *Functional analysis and Semi-Groups*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society (siehe S. 39).
- Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear systems analysis*. Second. Philadelphia: SIAM (siehe S. 31, 32, 36, 39, 45, 48).



## Kapitel 3

# Analyse und Synthese im Zustandsraum

Analog zum endlich-dimensionalen Fall hat sich für SVPn neben den Frequenzbereichsmethoden auch eine weitreichende und leistungsfähige Analyse- und Entwurfsmethodik basierend auf dem Zustandsraumkonzept entwickelt. Dies bietet insbesondere den Vorteil, eine große Klasse von SVPn in einem allgemeinen funktionalanalytischen Rahmen untersuchen zu können, wobei gleichzeitig eine rigorose Definition der Struktureigenschaften wie **Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit** ermöglicht wird. Darüber hinaus kann die Analyse der **Stabilität** der verteilt-parametrischen Strecke bzw. des mit Zustandsregler und -beobachter geschlossenen Regelkreises beispielsweise durch **spektrale Betrachtungen** oder durch die Übertragung der **Lyapunov-Theorie** auf den verteilt-parametrischen Fall erfolgen. Hierbei ist jedoch zu betonen, dass sich der Nachweis der Stabilität im Sinn von Lyapunov für SVPn im Vergleich zum endlich-dimensionalen Fall als mathematisch weitaus anspruchsvoller erweist.

### 3.1 Einführung in die Analyse im Zustandsraum

Im Folgenden werden lineare inhomogene PDgln in ein allgemeines mathematisches Gerüst eingebunden, das als eine Verallgemeinerung der Systemtheorie endlich-dimensionaler Systeme aufgefasst werden kann, wo sich das Konzept des **Zustandsraums** als besonders zweckmäßig erwiesen hat. Hierbei erlaubt die Einführung von Zustandsvariablen die Umwandlung einer gewöhnlichen Dgl.  $n$ -ter Ordnung in ein System von  $n$  Dgln. erster Ordnung. Für lineare zeitinvariante Systeme führt dies stets zu einer Beschreibung der Form

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

mit der Systemmatrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , der Steuermatrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , der Beobachtungsmatrix  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  und der Durchgriffmatrix  $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ . Offensichtlich ist die Lösung  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Dgl. (3.1)

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (3.3)$$

im linearen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  definiert, welcher den Zustandsraum  $X$  des Systems repräsentiert. Die Matrizen  $A, B, C, D$  können hierbei als lineare Operatoren zwischen linearen endlich-dimensionalen Vektorräumen aufgefasst werden, z.B.  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Definitionsbereich  $D(A) = \mathbb{R}^n$ .

Die Bedeutung des Zustandsraums zeichnet sich beispielsweise dadurch aus, dass die Struktureigenschaften Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit nur im Zeitbereich definiert werden können. Weiterhin existieren vielfältige leistungsfähige Konzepte zum Entwurf von stabilisierenden Rückführungen (z.B. LQR, optimale Regelung, ...), die z.T. keine direkte Analogie im Frequenzbereich aufweisen. Eine Übertragung des Zustandsraum-Konzepts auf Systeme die durch lineare PDgln. beschrieben werden, scheint also vielversprechend und wünschenswert. Dies führt zur Betrachtung von **Dgln. in abstrakten linearen unendlich-dimensionalen Funktionenräumen** (Curtain und Zwart, 1995).

### 3.1.1 Motivation und einleitende Beispiele

Zur Einführung in die abstrakte Betrachtung von SVPn in linearen Funktionenräumen werden im Folgenden zunächst beispielhaft die grundlegenden Konzepte erläutert.

**Beispiel 3.1 (Lineare Wärmeleitung mit örtlich verteilter Stellgröße).** Die Beeinflussung der Temperaturverteilung  $x(z, t)$  in einem System erfolge durch eine punktweise örtlich verteilte Stellgröße, so dass die Modellierung des Prozesses auf die PDgl.

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + b(z)u(t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (3.4)$$

mit den RBN

$$x(0, t) = x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.5)$$

sowie der AB

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (3.6)$$

führt. Für die Ortscharakteristik gilt

$$b(z) = \frac{1}{2\epsilon} (\sigma(z - (z_0 - \epsilon)) - \sigma(z - (z_0 + \epsilon))), \quad 0 < z_0 - \epsilon < z_0 + \epsilon < 1. \quad (3.7)$$

Aufgrund der homogenen RBN kann die Lösung des SVPn (3.4)–(3.6) leicht mittels eines **Produktansatzes**  $x(z, t) = \alpha(t)\psi(z)$  in Form einer **örtlichen Fourier-Reihe mit zeitvariablen Koeffizienten** bestimmt werden, d.h.

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k\pi)^2 t} x_k^0 \psi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k(z) \int_0^t e^{-(k\pi)^2 (t-\tau)} u(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

mit  $x_k^0 = \int_0^1 x_0(z) \psi_k(z) dz$ ,  $b_k = \int_0^1 b(z) \psi_k(z) dz = \sqrt{2}/(k\pi\epsilon) \sin(k\pi z_0) \sin(k\pi\epsilon)$ ,  $\psi_k(z) = \sqrt{2} \sin(k\pi z)$  für  $k \geq 1$ . Dabei sei bemerkt, dass  $\int_0^1 \psi_k(z) \psi_l(z) dz = \delta_{k,l}$  mit dem so genannten Kronecker-Delta  $\delta_{k,l} = 1$  falls  $k = l$  und  $\delta_{k,l} = 0$  falls  $k \neq l$ .

**Aufgabe 3.1.** Bestimmen Sie (3.8).

**Lösung 3.1.** Im Folgenden wird die Anwendung des Produktansatzes zur Bestimmung der Lösung von (3.4)–(3.6) erläutert. Dazu wird

$$x(z, t) = \alpha(t)\psi(z) \quad (3.9)$$

zunächst zur Lösung der **homogenen** PDgl. (3.4) mit  $b(z) \equiv 0$  verwendet. Die Auswertung von (3.4) mit (3.9) führt dabei auf

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} = -\mu^2, \quad (3.10)$$

wobei sich die letzte Identität direkt aufgrund der Tatsache ergibt, dass eine Funktion in der unabhängigen Koordinate  $t$  nur einer Funktion in der unabhängigen Koordinate  $z$  entsprechen kann, wenn beide Funktionen einer Konstanten (hier  $-\mu^2$ ) entsprechen. Damit ergeben sich die Lösungsansätze

$$\alpha(t) = e^{-\mu^2 t} \alpha^0 \quad (3.11)$$

$$\psi(z) = A \sin(\mu z) + B \cos(\mu z). \quad (3.12)$$

Zudem führt die Auswertung der RBN (3.5) mit (3.12) auf

$$B = 0, \quad A \sin(\mu) = 0.$$

Der Fall  $A = 0$  kann unmittelbar ausgeschlossen werden, da dies auf die triviale Lösung  $\psi(z) \equiv 0$  und damit

$x(z, t) \equiv 0$  führt. Im Weiteren gilt somit  $A \neq 0$ , weshalb die RBN nur dann erfüllt werden können, wenn  $\mu_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Der Fall  $\mu = 0$  führt wiederum nur auf die triviale Lösung und wird deshalb ebenfalls ausgeschlossen. Der verbliebene Parameter  $A$  bzw.  $A_k$  stellt einen Freiheitsgrad dar, da dieser aus keiner der verbliebenen Gleichungen ermittelt werden kann. Für die weitere Auswertung wird von der Eigenschaft Gebrauch gemacht, dass  $\int_0^1 \sin(k\pi z) \sin(l\pi z) dz = \delta_{k,l}/2$  mit dem Kronecker-Delta  $\delta_{k,l} = 1$  für  $k = l$  und  $\delta_{k,l} = 0$  für  $k \neq l$ . Offensichtlich führt dies auf die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\int_0^1 \psi_k^2(z) dz = \frac{A_k^2}{2} = 1, \quad \int_0^1 \psi_k(z) \psi_{-k}(z) dz = -\frac{A_k A_{-k}}{2} = 1$$

für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Hieraus ergeben sich  $A_k = \sqrt{2}$  und  $A_{-k} = -\sqrt{2}$  was auf  $\int_0^1 \sin(k\pi z) \sin(l\pi z) dz = \delta_{k,l}$  für alle  $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  führt. Wie im weiteren Teil der Vorlesung gezeigt wird, stellt die obige Bedingung eine **Orthonormierungsbedingung** dar. Des Weiteren ist leicht ersichtlich, dass die einzelnen Komponenten  $\psi_k(z)$  nicht unabhängig voneinander sind, da für alle  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt, dass  $\psi_k(z) = \psi_{-k}(z)$ . Für jedes  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ergibt sich nach (3.9) somit der entsprechende Lösungsanteil zu

$$x_k(z, t) = e^{-(k\pi)^2 t} \alpha_k^0 A_k \sin(k\pi z).$$

Aufgrund der **Superpositionseigenschaft** linearer Systeme kann somit die Gesamtlösung in Form der Reihe

$$x(z, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{-(k\pi)^2 t} \alpha_k^0 \psi_k(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-(k\pi)^2 t} \beta_k^0 \psi_k(z) \quad (3.13)$$

mit  $\beta_k^0 = \alpha_k^0 + \alpha_{-k}^0$  dargestellt werden. Im Fall  $b(z) \equiv 0$  können die Konstanten  $\beta_k^0$  direkt aufgrund der Orthogonalität der Funktionen  $\{\psi_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$  (es sei bemerkt, dass die Menge  $\{\psi_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Basis des Raums  $L^2((0, 1))$  darstellt) aus der Gleichung

$$\int_0^1 x_0(z) \psi_l(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^0 \int_0^1 \psi_k(z) \psi_l(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^0 \delta_{k,l} = \beta_l^0 \quad (3.14)$$

für jedes  $l \in \mathbb{N}$  bestimmt werden. Hierbei wird die Konvergenz der (Fourier-)Reihe (3.13) vorausgesetzt, damit die Vertauschung von Summation und Integration zulässig wird.

Im Fall  $b(z) \neq 0$  kann die Lösung der inhomogenen PDgl. direkt unter Verwendung eines Ansatzes auf Basis der Variation der Konstanten ermittelt werden. Mit

$$x(z, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-(k\pi)^2 t} \beta_k^0(t) \psi_k(z) \quad (3.15)$$

liefert die Auswertung von (3.4) die Bedingung

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-(k\pi)^2 t} \left( \frac{d\beta_k^0(t)}{dt} - \mu_k^2 \beta_k^0(t) \right) \psi_k(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-(k\pi)^2 t} \beta_k^0(t) \frac{d^2 \psi_k(z)}{dz^2} + b(z) u(t)$$

bzw. wegen (3.10)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-(k\pi)^2 t} \frac{d\beta_k^0(t)}{dt} \psi_k(z) = b(z) u(t).$$

Hieraus ergibt sich unter Ausnutzung der Orthonormalität der Elemente von  $\{\psi_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , dass

$$\int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-(k\pi)^2 t} \frac{d\beta_k^0(t)}{dt} \psi_k(z) \psi_l(z) dz = \int_0^1 b(z) \psi_l(z) dz u(t)$$

was äquivalent ist zu

$$e^{-(l\pi)^2 t} \frac{d\beta_l^0(t)}{dt} = b_l u(t), \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich führt dies auf  $\beta_1^0(t) = b_1 \int_0^t e^{(k\pi)^2 \tau} u(\tau) d\tau$ , womit sich mit (3.15) die Partikulärlösung zu

$$x(z, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \psi_k(z) \int_0^t e^{-(k\pi)^2(t-\tau)} u(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

ergibt. Die Gesamtlösung von (3.4)–(3.5) kann somit in Form der (Fourier-)Reihe (3.8) angegeben werden.

**Beispiel 3.2 (Lineare Wärmeleitung (Beispiel 3.1 kont.)).** Anhand der in diesem Fall bekannten Lösung (3.8) wird im Weiteren dargestellt, wie das SVP (3.4)–(3.6) in eine Zustandsdarstellung überführt werden kann.

Sei  $\langle \phi(z), \psi(z) \rangle_{L^2} = \int_0^1 \phi(z) \psi(z) dz$  mit  $\phi(z), \psi(z) \in L^2(0, 1)$  das so genannte **innere Produkt** im Raum  $L^2(0, 1)$  (siehe Appendix B.1.1). Somit folgt unmittelbar aus (3.8) die äquivalente Darstellung

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k\pi)^2 t} \langle x_0(z), \psi_k(z) \rangle_{L^2} \psi_k(z) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k\pi)^2(t-\tau)} \langle b(z)u(\tau), \psi_k(z) \rangle_{L^2} \psi_k(z) d\tau$$

Dies entspricht jedoch zumindest formal der Anwendung des Operators<sup>1</sup>

$$T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k\pi)^2 t} \langle \cdot, \psi_k \rangle_{L^2} \psi_k \quad (3.17)$$

auf die AB  $x_0(z)$  und die Inhomogenität  $b(z)u(t)$  entsprechend

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-\tau) b u(\tau) d\tau. \quad (3.18)$$

Der Vergleich mit (3.3) zeigt die formale Verwandtschaft  $T(t) \hat{=} e^{At}$  mit dem noch zu bestimmenden Operator  $A$ . Insbesondere folgt hieraus, dass (3.18) die Lösung des inhomogenen Cauchy-Problems

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + b u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(A) \quad (3.19)$$

ist mit den Operatoren  $Ax = \frac{d^2x}{dz^2}$  für  $x \in \mathcal{D}(A)$  und  $b = b(z)$ . Hierbei stellt  $\mathcal{D}(A)$  den Definitionsbereich des Operators  $A$  dar, dessen Ermittlung eng mit der im Weiteren untersuchten Wahl eines geeigneten Zustandsraumes zusammenhängt.

Eine Abwandlung des obigen Beispiels führt auf die Analyse der **linearen Wellengleichung**.

**Beispiel 3.3 (Lineare Wellengleichung mit örtlich verteilter Stellgröße).** Ausgehend von den Ausführungen in Beispiel 3.1 wird im Folgenden die lineare Wellengleichung mit einer örtlich verteilten Stellgröße analysiert, d.h.

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + b(z)u(t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (3.20)$$

mit den RBN

$$x(0, t) = x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.21)$$

sowie den ABn

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z) \quad z \in [0, 1]. \quad (3.22)$$

Die Ortscharakteristik  $b(z)$  entspricht (3.7). Ganz analog kann somit aufgrund der homogenen RBN (3.21) die Lösung des hyperbolischen Anfangsrandwertproblems (3.20)–(3.22) mittels eines Produktansatzes ermittelt werden. Dies führt nach einigen Zwischenrechnungen auf die Reihendarstellung der Lösung

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ x_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{x_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right] \psi_k(z) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{b_k}{\omega_k} \sin(\omega_k(t-\tau)) u(\tau) \right] \psi_k(z) d\tau. \quad (3.23)$$

<sup>1</sup>In der Literatur wird typischerweise die Abhängigkeit von der örtlichen Koordinate nicht angegeben.

Hier gelten  $\omega_k = k\pi$ ,  $x_k^0 = \langle x_0(z), \psi_k(z) \rangle_{L^2}$ ,  $x_k^1 = \langle x_1(z), \psi_k(z) \rangle_{L^2}$

$$b_k = \langle b(z), \psi_k(z) \rangle_{L^2} = \sqrt{2}/(k\pi\epsilon) \sin(k\pi z_0) \sin(k\pi\epsilon), \quad \psi_k(z) = \sqrt{2} \sin(k\pi z), \quad k \geq 1.$$

Zur Bestimmung einer Zustandsdarstellung sei bemerkt, dass für finit-dimensionale lineare Systeme 2. Ordnung (vgl. Schwingungs-Dgl.) oftmals  $x$  und  $\frac{dx}{dt}$  als Zustände gewählt werden. Im Folgenden wird dies auf das betrachtete SVP (3.20)–(3.22) übertragen. Sei  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$  mit  $x_1(t) = x(\cdot, t)$  und  $x_2(t) = \frac{\partial x(\cdot, t)}{\partial t}$ . Somit folgt unmittelbar, dass die Reihendarstellung (3.23) der formalen Anwendung des Operators

$$T(t)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \langle x_1, \psi_k \rangle_{L^2} \cos(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} \langle x_2, \psi_k \rangle_{L^2} \sin(\omega_k t) \right] \psi_k(z) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\omega_k \langle x_1, \psi_k \rangle_{L^2} \sin(\omega_k t) + \langle x_2, \psi_k \rangle_{L^2} \cos(\omega_k t) \right] \psi_k(z) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

auf den Vektor  $\mathbf{x}_0 = [x_0(\cdot), x_1(\cdot)]^T$  der ABn und den Vektor  $\mathbf{b}u(t) = [0, b(z)]^T u(t)$  der örtlich verteilten Inhomogenität gemäß

$$\mathbf{x}(t) = T(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t T(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau \quad (3.25)$$

entspricht. Insbesondere folgt hieraus, dass (3.25) die Lösung des inhomogenen Cauchy-Problems

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}(A) \quad (3.26)$$

ist mit den Operatoren

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(z) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Analog zu den Ausführungen in Beispiel 3.1 ist insbesondere im Weiteren die Frage der Wahl eines geeigneten Definitionsbereichs  $\mathcal{D}(A)$  des Operators  $A$  zu beantworten. Diese hängt jedoch unmittelbar mit der geeigneten Wahl eines geeigneten Zustandsraumes zusammen.

Anhand der obigen Beispiele 3.1 und 3.3 können wichtige Gesichtspunkte zur Wahl eines geeigneten Zustandsraums  $X$  bzw. geeigneter Zustände  $x_i(z, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  für ein gegebenes Problem abgeleitet werden. Speziell müssen der Zustandsraum bzw. die Zustände **wohl-definiert im Sinne von Hadamard** (Curtain und Zwart, 1995; Evans, 2002) gewählt werden, d.h. dass

- (i) eine eindeutige Lösung  $\mathbf{x}(z, t) \in X$  existiert
- (ii) die Lösung stetig von den Anfangsbedingungen (und dem Eingang) abhängt.

Zur Analyse von (ii) kann von folgendem Satz Gebrauch gemacht werden:

### Satz 3.1: (Jüngel, 2001)

Sei  $T : X \rightarrow X$  linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $T$  ist beschränkt, d.h.  $\exists K, 0 < K < \infty$ , so dass  $\|T\mathbf{x}\| \leq K\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in X$ .
- (ii)  $T$  ist stetig.
- (iii)  $\forall \mathbf{x}_0 \in X: T$  ist stetig in  $\mathbf{x}_0$ .

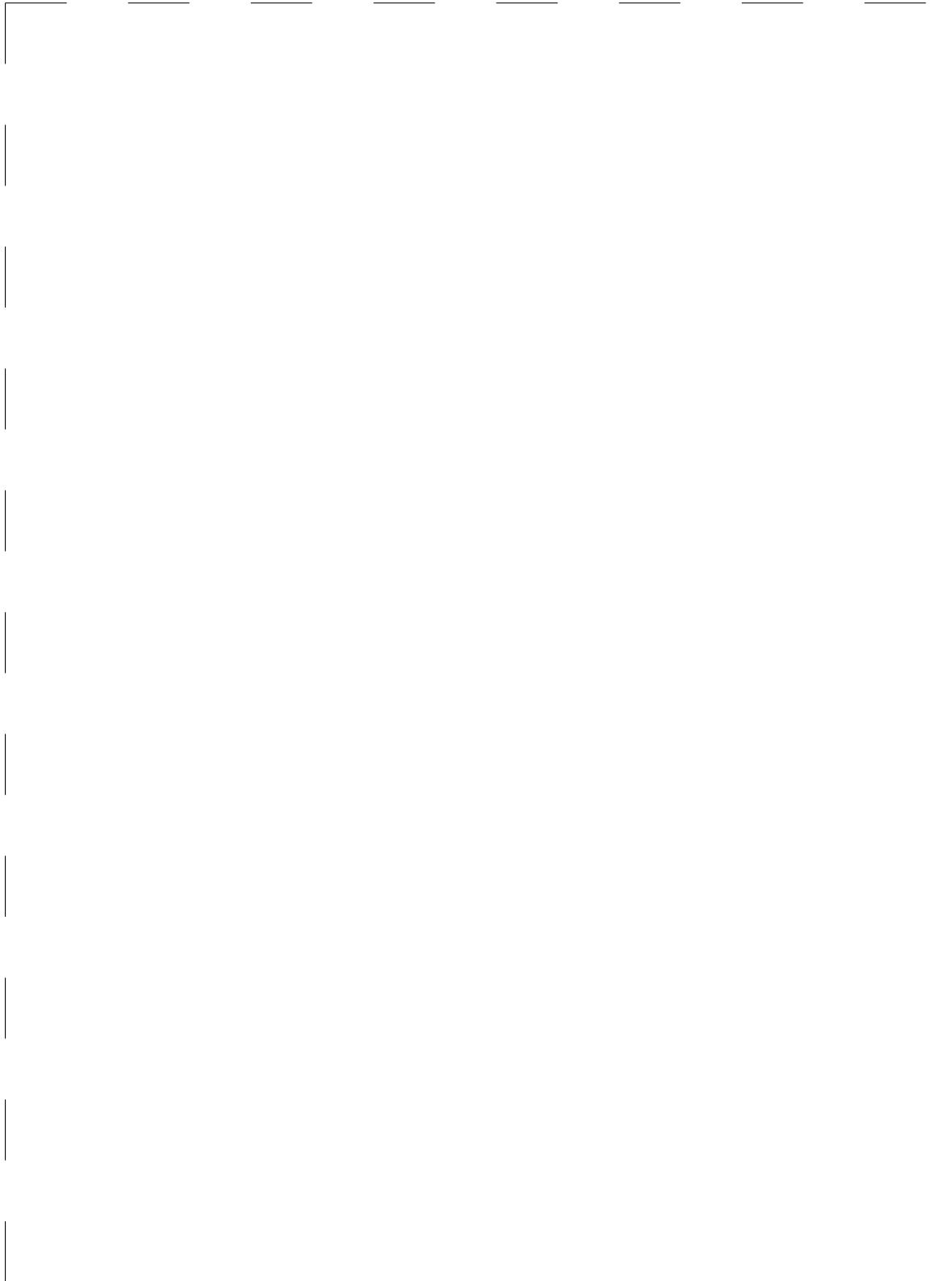
Die Bedeutung dieser Aussagen wird im Weiteren beispielhaft anhand der homogenen Cauchy-Probleme (3.4)–(3.6) bzw. (3.20)–(3.22) mit  $u(t) \equiv 0$  illustriert. Hierzu wird der Einfluss der ABn  $\mathbf{x}(\cdot, 0) = x_0(\cdot) =: \mathbf{x}_0$  (Beispiel 3.1) bzw.  $\mathbf{x}(\cdot, 0) = [x_0(\cdot), x_1(\cdot)]^T =: \mathbf{x}_0$  (Beispiel 3.3) auf die jeweilige Lösung  $\mathbf{x}(t) = T(t)\mathbf{x}_0$  bzw.  $\mathbf{x}(t) = T(t)\mathbf{x}_0$  untersucht.

**Beispiel 3.4 (Lineare Wärmeleitung (Beispiel 3.1 kont.)).** Sei  $X = L^2(0, 1)$  mit innerem Produkt  $\langle \phi, \psi \rangle_{L^2}$  für  $\phi, \psi \in L^2(0, 1)$  und induzierter Norm  $\|\phi\|_{L^2} = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_{L^2}}$ . Dann gilt:



**Beispiel 3.5 (Lineare Wellengleichung (Beispiel 3.3 kont.)).** Für das Beispiel der linearen Wellengleichung existieren verschiedene Möglichkeiten zur Einführung eines geeigneten Zustandsraumes.

- Sei  $X = L^2(0, 1) \oplus L^2(0, 1)$  (siehe Appendix B.1.2) mit innerem Produkt  $\langle \phi, \psi \rangle_X = \langle \phi_1, \psi_1 \rangle_{L^2} + \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_{L^2}$  für  $\phi_k, \psi_k \in L^2(0, 1)$ ,  $k = 1, 2$ , und induzierter Norm  $\|\phi\|_X = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_X}$ . Dann gilt:



- Sei  $X = H^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1)$  mit innerem Produkt  $\langle \phi, \psi \rangle_X = \langle \frac{d\phi_1}{dz}, \frac{d\psi_1}{dz} \rangle_{L^2} + \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_{L^2}$  für  $\phi_1, \psi_1 \in H^1(0, 1)$  und  $\phi_2, \psi_2 \in L^2(0, 1)$  und induzierter Norm  $\|\phi\|_X = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_X}$

Für diese Wahl des inneren Produkts kann leicht gezeigt werden, dass gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} x(z, t) \\ \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(z, t) \\ \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \end{bmatrix} \right\rangle_X &= \left\| \begin{bmatrix} x(\cdot, t) \\ \frac{\partial x(\cdot, t)}{\partial t} \end{bmatrix} \right\|_X^2 = \left\langle \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}, \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial x(z, t)}{\partial t}, \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \right\rangle_{L^2} \\ &= \int_0^1 \left[ \left| \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|^2 \right] dz = 2W_k(t) + 2W_p(t). \end{aligned} \quad (3.28)$$

### Anmerkung 3.1

Dabei ist jedoch die folgende Einschränkung anzumerken: Sei  $\phi_1 = c$  mit der beliebigen Konstanten  $c \neq 0$  und sei  $\phi_2 = 0$ , dann gilt  $\|\phi\|_X = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_X} = 0$ . Dies widerspricht der Definition einer Norm für die aus  $\|\phi\|_X = 0$  unmittelbar  $\phi = \vec{0}$  folgen muss. Um dieses Problem zu beheben wird in Anbetracht der Konfiguration der betrachteten Wellengleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen der Zustandsraum zu  $X = H_0^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1)$  abgewandelt, wobei gilt  $H_0^1(0, 1) = H^1(0, 1) \cap \{x(0) = 0\}$ . Mit der hier gewählten induzierten Norm wird der Zustandsraum (Hilbert-Raum) zu einem so genannten **Sobolev-Raum**.

Des Weiteren ist noch nachzutragen, wie der Definitionsbereich  $\mathcal{D}(A) \subset X = H_0^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1)$  des Operators  $A = [0, 1 | \frac{\partial^2}{\partial z^2}, 0]$  geeignet zu wählen ist. Da nach Aufgabenstellung  $x(0, t) = x(1, t) = 0$  gelten, folgt, dass  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}_1(A) \oplus \mathcal{D}_2(A)$  mit

$$\mathcal{D}_1(A) = \left\{ x \in L^2(0, 1) : x, \frac{dx}{dz} \text{ abs. stetig, } \frac{d^2x}{dz^2} \in L^2(0, 1), x(0) = x(1) = 0 \right\} \quad \text{und} \quad (3.29)$$

$$\mathcal{D}_2(A) = \left\{ x \in L^2(0, 1) : x, \frac{dx}{dz} \in L^2(0, 1) \right\}. \quad (3.30)$$

### Anmerkung 3.2

Durch die Wahl von so genannten **Energie-Koordinaten**  $x_1(z, t) = \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}$  und  $x_2(z, t) = \frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$  wird das betrachtete homogene Cauchy-Problem (3.20)–(3.22) mit  $u(t) \equiv 0$  wohl-definiert in der Norm  $\|\mathbf{x}\|^2 = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2) dz$  also in  $L^2(0, 1) \oplus L^2(0, 1)$ .

Mit diesen Beispielen kann unmittelbar das **grundlegende Prinzip** der abstrakten Darstellung von SVPn im Zustandsraum zusammengefasst werden: Durch die Einführung eines geeigneten Zustandsraums (typischerweise eines Hilbertraums) und die Interpretation des örtlichen Differenzialoperators als Operator  $A$  in dem entsprechenden Zustandsraum mit einem, die (homogenen) Randbedingungen umfassenden, Definitionsbereich  $\mathcal{D}(A)$  und einem Eingangoperator  $B$  bzw.  $Bu(t)$  kann das gegebene SVPn in die Zustandsdarstellung

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}(A) \quad (3.31)$$

überführt werden.

Es ist weiterhin zu beachten, dass auch die Inhomogenität  $f(t) = f(\cdot, t) = Bu(t)$  aus einem geeigneten Raum stammen muss. Dies kann z.B. der Raum aller stetigen Funktionen sein, die das Intervall  $[0, \tau]$ ,  $\tau > 0$  auf  $X$  abbilden, d.h.  $f(t) \in C([0, \tau], X)$ , oder entsprechend der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen, die das Intervall  $[0, \tau]$ ,  $\tau > 0$  auf  $X$  abbilden, d.h.  $f(t) \in L^p([0, \tau], X)$ . Ersteres führt beispielweise zur Definition von so genannten **klassischen Lösungen abstrakter Dgln.**, letzteres zur Definition so genannter **milder** bzw. **schwacher Lösungen von abstrakten Dgln.** (Curtain und Zwart, 1995).

Des Weiteren ist zu bemerken, dass bislang nur örtlich verteilt wirkende Stellgrößen im Rahmen des Zustandsraumkonzepts analysiert wurden. Dem gegenüber erfordert der Fall von **Randeingriffen** eine weitergehende Analyse. Dies kann leicht anhand des folgenden Beispiels motiviert werden.

**Beispiel 3.6 (Lineare Wärmeleitung mit Randeingriff).** Die orts- und zeitvariable Temperaturverteilung  $x(z, t)$  in einem Medium gehorche der folgenden PDgl. mit RBn und AB

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = u(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (3.32)$$

$$x(0, t) = u_0(t), \quad x(1, t) = u_1(t), \quad t > 0 \quad (3.33)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (3.34)$$

<sup>2</sup>Hierbei gilt  $H^m(a, b) = \left\{ x \in L^2(a, b) : \frac{d^\alpha x}{dz^\alpha} \in L^2(a, b), \alpha = 0, 1, \dots, m \right\}$ .

Unter der Annahme  $u_0(t) = u_1(t) = 0$  ermöglicht die Einführung des Operators

$$A\phi = \frac{d^2\phi}{dz^2} \quad (3.35)$$

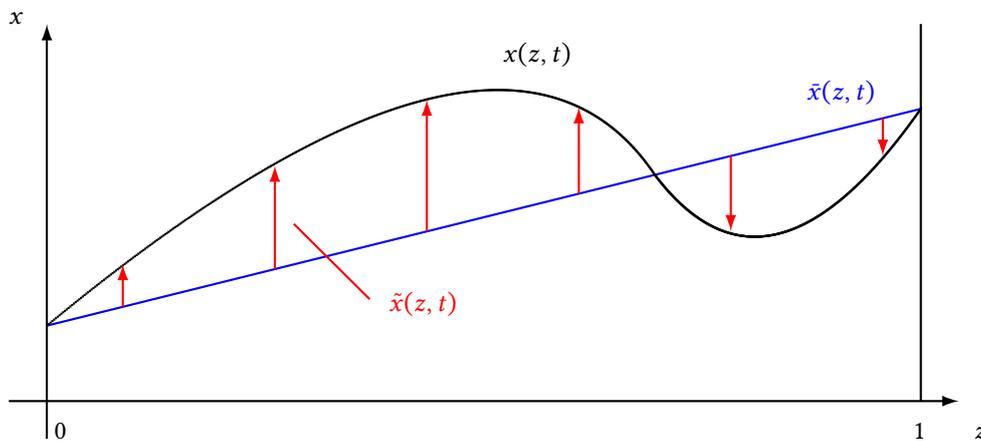
mit Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ \phi \in L^2(0,1) : \phi, \frac{d\phi}{dz} \text{ abs. stetig, } \frac{d^2\phi}{dz^2} \in L^2(0,1), \phi(0) = 0 = \phi(1) \right\} \quad (3.36)$$

die abstrakte Darstellung des inhomogenen Cauchy-Problems (3.32)–(3.34) in der Form (3.31) mit  $Bu(t) = u(\cdot, t)$ . Es ist zudem offensichtlich, dass sowohl  $x(0, t) = u_0(t)$  also auch  $x(1, t) = u_1(t)$  aufgrund deren Zeitvarianz **nicht** in den Definitionsbereich  $D(A)$  integriert werden können.

Offensichtlich sind zur Darstellung von SVPn mit inhomogenen RBn im Zustandsraum weitere Schritte notwendig. Eine Möglichkeit bietet dabei die **Homogenisierung von Randbedingungen**, die im Folgenden anhand von Beispiel 3.6 illustriert wird.

**Beispiel 3.7 (Lineare Wärmeleitung mit Randeingriff (Beispiel 3.6 kont.)).** Offensichtlich bedingt die Zustandsdarstellung von SVPn homogene RBn. Im Fall inhomogener RBn kann dies u.U. durch das **Homogenisieren der RBn** erreicht werden. Das Prinzip zeigt untenstehende Skizze.



Die grundlegende Idee basiert auf der **Separation des Zustands**  $x(z, t)$  des SVPn in einen Anteil  $\tilde{x}(z, t)$ , der, wie im Folgenden gezeigt wird, eine PDgln. mit homogenen RBn erfüllt, sowie einen Anteil  $\bar{x}(z, t)$ , der den Einfluss der RBn beschreibt. Für das Modell des Wärmeleiters (3.32)–(3.34) führt dies auf

$$x(0, t) = u_0(t) = \underbrace{\tilde{x}(0, t)}_{=0} + \bar{x}(0, t) \quad (3.37)$$

$$x(1, t) = u_1(t) = \underbrace{\tilde{x}(1, t)}_{=0} + \bar{x}(1, t). \quad (3.38)$$

Beispielsweise erfüllt

$$\bar{x}(z, t) = u_0(t) + z[u_1(t) - u_0(t)] \quad (3.39)$$

diese Bedingungen. Substitution von  $x(z, t) = \tilde{x}(z, t) + \bar{x}(z, t)$  in (3.32)–(3.34) führt auf folgende inhomogene PDgl. in  $\tilde{x}(z, t)$  mit nun homogenen Randbedingungen

$$\frac{\partial \tilde{x}(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{x}(z, t)}{\partial z^2} = u(z, t) - \frac{\partial \bar{x}(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{x}(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (3.40)$$

$$\tilde{x}(0, t) = 0, \quad \tilde{x}(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.41)$$

$$\tilde{x}(z, 0) = x_0(z) - \bar{x}(z, 0), \quad z \in [0, 1]. \quad (3.42)$$

Diese Analyse setzt natürlich die entsprechende Differenzierbarkeit von  $\bar{x}(z, t)$  voraus, wobei speziell die Randgrößen  $u_0(t), u_1(t) \in C^1([0, \tau])$ ,  $\tau > 0$  sind. Zur Überführung von (3.40)–(3.42) in Zustandsdarstellung mit dem

Zweck der Lösungsbestimmung bei bekannten  $u(z, t)$ ,  $u_0(t)$  und  $u_1(t)$ , kann das SVPn durch Substitution von

$$\tilde{u}(z, t) = u(z, t) - \frac{\partial \bar{x}(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{x}(z, t)}{\partial z^2}$$

in eine Form entsprechend (3.31) gebracht werden. Stellen andererseits  $u_0(t)$  bzw.  $u_1(t)$  die Eingriffsgrößen in das System dar, so kann (3.40)–(3.42) in geschickter Form auf einem erweiterten Zustandsraum dargestellt werden ( $u_0(t)$  bzw.  $u_1(t)$  als weitere Zustandsgrößen). Dies führt zur Theorie der so genannten „**Boundary Control Systems**“ (Fattorini, 1968; Curtain und Zwart, 1995).

Ein anderer Zugang zur Analyse von Systemen mit inhomogenen Randbedingungen basiert auf der Einführung von Operatorenerweiterungen (Ho und Russell, 1983; Tucsnak und Weiss, 2009), wobei die resultierende Systemformulierung in der Form (3.31) keine punktweise Erfüllung der inhomogenen Randbedingungen ermöglicht.

### 3.1.2 Gleichmäßig stetige Halbgruppen und infinitesimale Generatoren

Anhand der obigen Beispiele lässt sich das grundlegende Konzept der so genannten gleichmäßig stetigen bzw. stark stetigen Halbgruppen ableiten (Jüngel, 2001).

#### Definition 3.1: Gleichmäßig bzw. stark stetige Halbgruppe

Sei  $X$  ein Banach-Raum und  $T(t) : X \rightarrow X$ ,  $0 \leq t < \infty$  eine Familie linearer beschränkter Operatoren.

(i)  $T(t)$  ist eine **Halbgruppe linearer beschränkter Operatoren** auf  $X$ , wenn

$$T(0) = I \tag{3.43}$$

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0. \tag{3.44}$$

(ii) Eine Halbgruppe linearer beschränkter Operatoren  $T(t)$  auf  $X$  heißt **gleichmäßig stetig**, wenn

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0. \tag{3.45}$$

(iii) Eine Halbgruppe linearer beschränkter Operatoren  $T(t)$  auf  $X$  heißt **stark stetig**, wenn

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x_0 = x_0 \quad \forall x_0 \in X. \tag{3.46}$$

Eine stark stetige Halbgruppe beschränkter linearer Operatoren wird auch als  **$C_0$ -Halbgruppe** bezeichnet.

#### Anmerkung 3.3

Offensichtlich stellt  $T(t)$  definiert in (3.17) bzw. (3.24) jeweils eine  $C_0$ -Halbgruppe im entsprechenden Zustandsraum  $X$  dar.

#### Satz 3.2

Sei  $T(t)$  eine  $C_0$ -Halbgruppe im Hilbertraum  $X$  und sei  $\omega_0 = \inf_{t>0} (\frac{1}{t} \log \|T(t)\|)$ . Dann gilt

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|T(t)\|}{t} < \infty$$

und für jedes  $\omega \geq \omega_0$  existiert eine Konstante  $M_\omega$ , so dass für alle  $0 \leq t < \infty$  gilt

$$\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}. \tag{3.47}$$

Hier stellt  $\|T\|$  die Operatornorm von  $T$  dar (siehe Appendix B.1.5). Offensichtlich liefert dieser Satz eine Aussage zum **Wachstum** bzw. zu **Wachstumsgrenzen** von  $C_0$ -Halbgruppen und führt zu folgender Definition (Curtain und Zwart, 1995; Jüngel, 2001).

### Definition 3.2

Sei  $T(t)$  eine  $C_0$ -Halbgruppe mit  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ ,  $M, \omega \in \mathbb{R}$ . Dann heißt  $T(t)$

- **gleichmäßig beschränkt**, falls  $\omega = 0$ , d.h.  $\|T(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$ ,
- **$C_0$ -Halbgruppe von Kontraktionen**, falls  $M = 1$  und  $\omega = 0$ , d.h.  $\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$ .

Es ist leicht ersichtlich, dass die Eigenschaft einer  $C_0$ -Halbgruppe kontrahierend zu sein, eine wichtige Rolle zum Nachweis der Stabilität eines gegebenen Systems spielt.

### Anmerkung 3.4

Die  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  definiert in (3.24) ist kontrahierend mit  $\|T(t)\| \leq 1$ .

Im Allgemeinen ist es jedoch nicht möglich, die Lösung also die Halbgruppe  $T(t)$  zu einem gegebenen unendlich-dimensionalen Problem explizit zu bestimmen, um die Eigenschaften des Systems zu ermitteln. Es ist deshalb von Interesse, ein System anhand des Systemoperators, dem so genannten **infinitesimalen Generator** einer Halbgruppe, zu untersuchen.

### Definition 3.3

Der lineare Operator  $A : D(A) \rightarrow X$ , definiert durch

$$D(A) = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)\mathbf{x} - \mathbf{x}) \text{ existiert} \right\} \quad (3.48)$$

$$A\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)\mathbf{x} - \mathbf{x}) = \left. \frac{dT(t)\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.49)$$

für  $\mathbf{x} \in D(A)$ , heißt der **infinitesimale Generator** der Halbgruppe  $T(t)$ .

Analog zum linearen endlich-dimensionalen Fall wird in den weiteren Abschnitten versucht, direkt anhand des infinitesimalen Generators  $A$  sowie der noch einzuführenden Eingangs- und Ausgangsoperatoren  $B$  und  $C$  auf Struktureigenschaften wie Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit sowie Stabilisierbarkeit bzw. Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu schließen. Einige wichtige Eigenschaften von  $C_0$ -Halbgruppen und deren infinitesimalen Generatoren sind im Folgenden zusammengefasst (Curtain und Zwart, 1995; Jünger, 2001).

### Satz 3.3

Sei  $T(t)$  eine  $C_0$ -Halbgruppe und  $A$  ihr infinitesimaler Generator. Dann gilt

(i) für alle  $\mathbf{x} \in X$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)\mathbf{x} ds = T(t)\mathbf{x}. \quad (3.50)$$

(ii) für alle  $\mathbf{x} \in X$ :

$$\int_0^t T(s)\mathbf{x} ds \in D(A) \text{ und } A \left( \int_0^t T(s)\mathbf{x} ds \right) = T(t)\mathbf{x} - \mathbf{x}. \quad (3.51)$$

(iii) für alle  $\mathbf{x} \in D(A)$ :

$$T(t)\mathbf{x} \in D(A) \text{ und } \frac{d}{dt} T(t)\mathbf{x} = AT(t)\mathbf{x} = T(t)A\mathbf{x}. \quad (3.52)$$

(iv) für alle  $\mathbf{x} \in D(A)$ :

$$T(t)\mathbf{x} - T(s)\mathbf{x} = \int_s^t T(\tau)A\mathbf{x} d\tau = \int_s^t AT(\tau)\mathbf{x} d\tau. \quad (3.53)$$

Hiermit kann leicht das folgende Resultat gezeigt werden (Jünger, 2001).

**Korollar 3.1.** Sei  $A$  der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$ . Dann ist  $A$  ein **linearer, abgeschlossener Operator** (siehe Appendix B.1.3) mit  $\overline{D(A)} = X$ , d.h.  $D(A)$  liegt **dicht** in  $X$  (siehe Appendix B.1.4).

Weitere Begriffe und Eigenschaften von  $C_0$ -Halbgruppen und ihren infinitesimalen Generatoren werden an den entsprechenden Stellen im Text angegeben. Zudem sind einige grundlegende Begriffe in Anhang B.1 zusammengefasst. Mit obigen Vorbereitungen werden in den Abschnitten B.2 und B.3 mit dem **Hille–Yoshida Theorem** und dem **Lumer–Phillips Theorem** zwei Kriterien abgeleitet, die die Schlußfolgerung ermöglichen, dass ein Operator  $A$  tatsächlich der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe ist.

### 3.1.3 Rieszsche Operatoren

Eine aus praktischer Sicht sehr wichtige Klasse von Operatoren bezeichnen die so genannten Rieszschen Operatoren. Zu deren Einführung sind jedoch weitere funktionalanalytische Konzepte notwendig, wie beispielsweise so genannte **adjungierte Operatoren**, **kompakte Operatoren** und die **Eigenwertaufgabe** für lineare Operatoren in Hilberträumen. Diese werden im Folgenden einführend erläutert und anhand von Beispielen illustriert.

#### 3.1.3.1 Adjungierte und selbst-adjungierte Operatoren

Adjungierte Operatoren können im Prinzip als Verallgemeinerung der transponierten Matrix in der linearen Algebra aufgefasst werden.

##### Definition 3.4: Adjungierter Operator

Sei  $A$  ein linearer Operator im Hilbertraum  $(X, \|\cdot\|_X)$  mit Definitionsbereich  $D(A)$  dicht in  $X$ . Sei  $D(A^*)$  die Menge aller  $y \in X$  so, dass ein  $y^* \in X$  existiert mit

$$\langle Ax, y \rangle_X = \langle x, y^* \rangle_X \quad \forall x \in D(A).$$

Für jedes  $y \in D(A^*)$  ist dann der adjungierte Operator  $A^* : D(A^*) \subset X \rightarrow X$  als

$$A^* y = y^*$$

definiert.

Eine Anwendung dieser Definition wird im folgenden Beispiel illustriert.

**Beispiel 3.8 (Adjungierter Operator für einen Differenzialoperator  $n$ -ter Ordnung).** Für  $x(z) \in L^2(0, 1)$  sei der Differenzialoperator  $n$ -ter Ordnung durch

$$Ax = \sum_{j=0}^n \beta_j \frac{d^j x}{dz^j}, \quad \beta_n \neq 0 \tag{3.54}$$

gegeben mit dem Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ x \in L^2(0, 1) \mid \frac{d^j x}{dz^j} \text{ abs. stetig für } j = 0, \dots, n-1, \frac{d^n x}{dz^n} \in L^2(0, 1), \right. \\ \left. \sum_{j=0}^{n-1} \left( \gamma_{j,l}^0 \frac{d^j x}{dz^j}(0) + \gamma_{j,l}^1 \frac{d^j x}{dz^j}(1) \right) = 0, l = 1, \dots, n \right\}. \tag{3.55}$$

Gemäß Definition 3.4 ergibt sich der zu  $A$  adjungierte Operator  $A^*$  aus

$$\langle Ax, y \rangle_{L^2} = \left\langle \sum_{j=0}^n \beta_j \frac{d^j x}{dz^j}, y \right\rangle_{L^2} = \int_0^1 \sum_{j=0}^n \beta_j \frac{d^j x}{dz^j} y dz = \langle x, A^* y \rangle_{L^2}. \tag{3.56}$$

Mittels  $n$ -facher partieller Integration liefert die Auswertung des Integralausdrucks

$$\int_0^1 \sum_{j=0}^n \beta_j \frac{d^j x}{dz^j} y dz = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \beta_{j+1} \sum_{k=0}^j (-1)^k \frac{d^{j-k} x}{dz^{j-k}} \frac{d^k y}{dz^k} \right]_{z=0}^{z=1} + \int_0^1 x \sum_{j=0}^n (-1)^j \beta_j \frac{d^j y}{dz^j} dz. \tag{3.57}$$

Ein Vergleich von (3.57) mit (3.56) führt somit unmittelbar auf die Gleichung des adjungierten Operators

$$A^*x = \sum_{j=0}^n (-1)^j \beta_j \frac{d^j x}{dz^j}. \quad (3.58)$$

Die Bestimmung des Definitionsbereichs  $D(A^*)$  erfolgt somit aus der Bedingung, dass

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[ \beta_{j+1} \sum_{k=0}^j (-1)^k \frac{d^{j-k} x}{dz^{j-k}} \frac{d^k y}{dz^k} \right]_{z=0}^{z=1} = 0$$

für alle  $x \in D(A)$ . Offensichtlich existieren Konstanten  $\gamma_{j,l}^{0,*}$  und  $\gamma_{j,l}^{1,*}$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ ,  $l = 1, \dots, n$  so, dass die obige Gleichung identisch erfüllt wird, weshalb

$$D(A^*) = \left\{ x \in L^2(0,1) \mid \frac{d^j x}{dz^j} \text{ abs. stetig für } j = 0, \dots, n-1, \frac{d^n x}{dz^n} \in L^2(0,1), \right. \\ \left. \sum_{j=0}^{n-1} \left( \gamma_{j,l}^{0,*} \frac{d^j x}{dz^j}(0) + \gamma_{j,l}^{1,*} \frac{d^j x}{dz^j}(1) \right) = 0, l = 1, \dots, n \right\}. \quad (3.59)$$

Einige wichtige Eigenschaften adjungierter Operatoren sind untenstehend zusammengefasst (siehe auch z.B. Heuser, 1992; Curtain und Zwart, 1995).

#### Satz 3.4

Der adjungierte Operator  $A^* : D(A^*) \subset X \rightarrow X$  ist eine stetige lineare Abbildung, d.h.  $A^* \in \mathcal{L}(D(A^*), X)$ , mit  $\|A^*\| = \|A\|$ . Sei  $B \in \mathcal{L}(X, X)$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$ , dann gelten die folgenden Regeln:

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad D((A+B)^*) = D(A^*) \quad (3.60)$$

$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \quad D((\alpha A)^*) = \begin{cases} D(A^*), & \alpha \neq 0 \\ X, & \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

$$(AB)^* = B^* A^* \quad (3.62)$$

$$I^* = I, \quad 0^* = 0. \quad (3.63)$$

Ist  $A$  bijektiv, so ist auch  $A^*$  bijektiv und  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ . Des Weiteren gilt  $A^{**} = (A^*)^* = A$ .

Zusätzlich kann der Begriff des so genannten **selbst-adjungierten Operators** eingeführt werden.

#### Definition 3.5: Symmetrische und selbst-adjungierte Operatoren

Ein linearer Operator  $A$  im Hilbertraum  $X$  wird als symmetrisch bezeichnet, falls

$$\langle Ax, y \rangle_X = \langle x, Ay \rangle_X \quad \forall x, y \in D(A).$$

Ein symmetrischer Operator wird als selbst-adjungiert bezeichnet, falls zusätzlich  $D(A) = D(A^*)$ .

### 3.1.3.2 Kompakte Operatoren

Für eine gewisse Klasse von Operatoren, den so genannten **kompakten Operatoren**, können im Prinzip analog zum Fall linearer endlich-dimensionaler Systeme Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren bzw. Eigenfunktionen getroffen werden (Curtain und Zwart, 1995; Heuser, 1992; Naylor und Sell, 1982).

#### Definition 3.6: Kompakter Operator

Seien  $X$  und  $Y$  normierte lineare Räume. Ein Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  wird als kompakt bezeichnet, wenn das Bild  $\{Ax_n\}_n$  jeder beschränkten Folge  $\{x_n\}_n \in X$  eine konvergente Teilfolge enthält.

Zum eigentlichen Nachweis der Kompaktheit eines Operators ist dabei das folgende Lemma nützlich (Curtain und Zwart, 1995; Heuser, 1992; Naylor und Sell, 1982).

### Lemma 3.1

Seien  $X$  und  $Y$  normierte lineare Räume und sei  $A : X \rightarrow Y$  ein linearer Operator. Dann gelten:

- (i)  $A$  ist ein kompakter Operator, falls  $A$  beschränkt ist und  $\dim(A(X)) < \infty$ .
- (ii) Konvergiert die Folge  $\{A_n\}_n$  von kompakten Operatoren von  $X$  nach  $Y$  gleichmäßig gegen  $A$ , so ist  $A$  kompakt.
- (iii) Sei  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  kompakt und sei der Bildbereich von  $A$  ein abgeschlossener Unterraum von  $Y$ . Dann ist der Bildbereich von  $A$  endlich-dimensional.

Die Anwendung dieses Lemma kann direkt anhand des folgenden Beispiels verdeutlicht werden.

**Beispiel 3.9 (Nachweis der Kompaktheit eines Operators).** Sei  $X = L^2(0, 1)$  und  $A : X \rightarrow X$  gegeben durch

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} x_j \psi_j, \quad \lambda_j = -(j\pi)^2, \quad x_j = \langle x, \psi_j \rangle_{L^2}, \quad \langle \psi_k, \psi_j \rangle_{L^2} = \delta_{k,j} \quad (3.64)$$

mit  $\text{span}_{n \geq 1} \{\psi_n\} = X$ .  $A$  ist offensichtlich linear. Sei nun

$$A_n x = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} x_j \psi_j.$$

Damit folgt unmittelbar, dass auch  $A_n$  linear ist und für jedes endliche  $n$  einen endlich-dimensionalen Bildbereich besitzt. Nach Lemma 3.1(i) ist  $A_n$  kompakt. Zum Nachweis, dass  $A_n$  gleichmäßig gegen  $A$  konvergiert, betrachte man

$$\|Ax - A_n x\|_X^2 = \int_0^1 \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} x_j \psi_j \right)^2 dz \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 = \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \|x\|^2.$$

Somit ergibt sich

$$\|A - A_n\| \leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} = \frac{1}{((n+1)\pi)^2} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Nach Lemma 3.1(ii) ist  $A$  kompakt.

Insbesondere stellen Integraloperatoren eine Klasse kompakter Operatoren dar (Curtain und Zwart, 1995).

### Satz 3.5: Kompaktheit von Integraloperatoren

Sei  $k(z, s) \in L^2([a, b] \times [a, b])$ . Dann ist der Integraloperator  $K : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$  definiert durch

$$(Kx)(z) = \int_a^b k(z, s)x(s)ds \quad (3.65)$$

ein kompakter Operator.

### 3.1.3.3 Eigenwertprobleme

Die Analyse des Eigenwertproblems, d.h.

$$(\lambda I - A)x = 0, \quad x \in \mathcal{D}(A), \quad (3.66)$$

erfordert zunächst die Klärung, was unter einem Eigenwert eines Operators  $A$  zu verstehen ist. Dies ist Gegenstand der folgenden Definition, die zudem die im Weiteren wichtigen Begriffe der Resolvente und deren Definitionsbereich, der Resolventmenge, einführt.

### Definition 3.7: Resolventenmenge und Spektrum

Sei  $A$  ein linearer Operator in einem normierten Raum  $X$ . Die Menge

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ ist injektiv, } \overline{D((\lambda I - A)^{-1})} = X, (\lambda I - A)^{-1} \text{ ist beschränkt} \right\}$$

heißt die **Resolventenmenge** von  $A$ . Die Abbildung  $R(\cdot, A) : \lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$  ist die **Resolvente** von  $A$ . Die Menge

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

wird als **Spektrum** von  $A$  bezeichnet. Die Menge der **Eigenwerte** von  $A$

$$\sigma_p(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ ist nicht injektiv} \}$$

nennt man das **Punktspektrum** von  $A$ .

### Anmerkung 3.5

Die Resolvente  $R(\cdot, A)$  eines infinitesimalen Generators  $A$  einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  entspricht der **Laplace-Transformation der Halbgruppe**, da aus

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in D(A)$$

unmittelbar folgt, dass

$$X(z, s) = (sI - A)^{-1}(bU(s) + x_0(z)) = R(s, A)(bU(s) + x_0(z)).$$

Das Element  $0 \neq x \in D(A)$  für das  $(\lambda I - A)x = 0$  bei gegebenem  $\lambda \in \sigma_p(A)$  wird als **Eigenvektor** bzw. **Eigenfunktion** bezeichnet. Daneben können beispielsweise noch die algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten sowie generalisierte Eigenfunktionen definiert werden.

Für allgemeine lineare Operatoren ist die spektrale Analyse ungemein schwieriger als für endlich-dimensionale Operatoren. Aufgrund der vorhandenen Ähnlichkeit zu endlich-dimensionalen Operatoren, können jedoch für die Klasse der kompakten Operatoren weiterführende spektrale Ergebnisse abgeleitet werden. Für eine allgemeine Analyse sei dazu auf Curtain und Zwart, 1995; Heuser, 1992; Naylor und Sell, 1982; Showalter, 1994 verwiesen. Im Folgenden werden nur die für die weiteren Untersuchungen notwendigen Ergebnisse zusammengefasst.

### Lemma 3.2

Sei  $A$  ein abgeschlossener linearer Operator in  $X$ , dessen Resolvente  $R(\lambda, A)$  für ein  $\lambda \in \rho(A)$  existiert und kompakt ist. Dann besteht das Spektrum von  $A$  nur aus isolierten Eigenwerten mit endlicher (algebraischer) Vielfachheit und  $R(\lambda, A)$  ist kompakt für alle  $\lambda \in \rho(A)$ .

Dieses Ergebnis aus Kato, 1980, S. 187 ist insbesondere in Anwendungen von Bedeutung. Kompakte, normale Operatoren auf einem Hilbertraum besitzen keine generalisierten Eigenfunktionen und erlauben eine spektrale Zerlegung analog zu normalen Matrizen.

### Satz 3.6

Sei  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  ein kompakter, normaler Operator in dem Hilbertraum  $X$ . Dann existieren eine orthonormale Basis von Eigenfunktionen  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  und entsprechende Eigenwerte  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  so, dass

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \phi_n \rangle_X \phi_n \quad \forall x \in X. \quad (3.67)$$

Die Anwendung dieses Satzes wird in folgendem Beispiel illustriert.

**Beispiel 3.10.** Sei  $X = L^2(0, 1)$  und

$$(Kx)(z) = - \int_0^1 k(z, s)x(s)ds \quad (3.68)$$

mit

$$k(z, s) = \begin{cases} (1-s)z, & 0 \leq z \leq s \leq 1 \\ (1-z)s, & 0 \leq s \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (3.69)$$

Da  $k(z, s) = k(s, z)$  ist leicht nachweisbar, dass  $K$  selbst-adjungiert ist. Wegen Satz 3.5 ist  $K$  kompakt, so dass die Eigenwerte und Eigenfunktionen von  $K$  aus der Bedingung  $K\phi = \lambda\phi$  bestimmt werden können, d.h.

$$-\int_0^z (1-z)s\phi(s)ds - \int_z^1 (1-s)z\phi(s)ds = \lambda\phi(z).$$

Die linke Seite der Gleichung ist zweifach stetig nach  $z$  differenzierbar, was auf die Gleichung

$$\phi(z) = \lambda \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} \quad (3.70)$$

führt. Zudem gelten  $(K\phi)(0) = 0$  und  $(K\phi)(1) = 0$  bzw.

$$\lambda\phi(0) = (K\phi)(0) = 0, \quad \lambda\phi(1) = (K\phi)(1) = 0. \quad (3.71)$$

Für  $\lambda = 0$  ergibt sich somit nur die triviale Lösung, weshalb  $\lambda = 0$  keinen Eigenwert von  $K$  darstellt. Sei nun  $\lambda \neq 0$ , womit sich aus (3.71) die RBN  $\phi(0) = \phi(1) = 0$  ergeben. Die Lösung der Randwertaufgabe (3.70) mit diesen RBN führt auf die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen

$$\lambda_n = -\frac{1}{(n\pi)^2}, \quad \phi_n(z) = \sqrt{2} \sin(n\pi z), \quad n \geq 1. \quad (3.72)$$

Mit Satz 3.6 folgt, dass  $\{\sqrt{2} \sin(n\pi z)\}_{n=1}^\infty$  eine orthonormale Basis von  $X = L^2(0, 1)$  darstellt.

Zusätzlich kann gezeigt werden, dass jeder kompakte, jedoch nicht notwendigerweise normale, lineare Operator in eine spektrale Darstellung ähnlich zu (3.67) überführt werden kann (Curtain und Zwart, 1995).

### 3.1.3.4 Rieszscher Operator

Der folgende Satz aus Curtain und Zwart, 1995 bildet die Grundlage für die Definition so genannter Rieszscher Operatoren.

#### Satz 3.7

Sei  $A$  ein linearer Operator in dem Hilbertraum  $X$  mit Definitionsbereich  $\mathcal{D}(A)$  und sei  $0 \in \rho(A)$ . Sei zudem  $A^{-1}$  normal und kompakt. Mit Satz 3.6 folgt, dass  $A^{-1}$  für alle  $\mathbf{x} \in X$  die spektrale Darstellung

$$A^{-1}\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle \mathbf{x}, \phi_n \rangle_X \phi_n \quad (3.73)$$

aufweist, wobei  $\lambda_n^{-1}$  und  $\phi_n$  die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen von  $A^{-1}$  darstellen und  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$  eine orthonormale Basis von  $X$  repräsentiert. Für  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$  weist  $A$  die spektrale Darstellung

$$A\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \mathbf{x}, \phi_n \rangle_X \phi_n \quad (3.74)$$

mit

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle \mathbf{x}, \phi_n \rangle_X|^2 < \infty \right\} \quad (3.75)$$

auf. Zudem ist  $A$  ein abgeschlossener linearer Operator.

Die Anwendung dieses Satzes wird in Folgenden anhand des örtlichen Operators der Wärmeleitungsgleichung verdeutlicht.

**Beispiel 3.11.** Sei  $X = L^2(0, 1)$  und

$$Ax = \frac{d^2 x}{dz^2} \quad (3.76)$$

$$D(A) := \left\{ x \in X \mid x, \frac{dx}{dz} \text{ abs. stetig, } \frac{d^2 x}{dz^2} \in L^2(0, 1), x(0) = x(1) = 0 \right\}.$$

Die Inverse  $A^{-1}$  von  $A$  kann in Form der Integralgleichung

$$(A^{-1}x)(z) = - \int_0^1 k(z, s)x(s)ds$$

mit  $k(z, s)$  aus (3.69) bestimmt werden<sup>3</sup>. Wie in Beispiel 3.10 gezeigt wurde, ist  $A^{-1}$  ein kompakter, selbst-adjungierter linearer Operator mit den Eigenwerten  $\{-1/(n\pi)^2\}_{n=1}^\infty$  und den Eigenfunktionen  $\{\sqrt{2} \sin(n\pi z)\}_{n=1}^\infty$ . Nach Satz 3.7 ist  $A$  ein abgeschlossener linearer Operator mit der spektralen Zerlegung

$$Ax = \sum_{n=1}^\infty -(n\pi)^2 \langle x, \sqrt{2} \sin(n\pi z) \rangle_{L^2} \sqrt{2} \sin(n\pi z)$$

und dem Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \sum_{n=1}^\infty (n\pi)^4 |\langle x, \sqrt{2} \sin(n\pi z) \rangle_{L^2}|^2 < \infty \right\}.$$

Mit diesen Vorarbeiten kann die aus praktischer Sicht sehr wichtige Klasse der so genannten **Rieszchen Operatoren** eingeführt werden. Diese umfassen alle Operatoren deren Eigenfunktionen eine so genannte **Riesz-Basis** bilden (Curtain und Zwart, 1995).

#### Definition 3.8: Riesz-Basis

Eine Folge von Vektoren  $\{\phi_n, n \geq 1\}$  in einem Hilbertraum  $X$  bildet eine **Riesz-Basis** für  $X$  falls:

- (i)  $\overline{\text{span}_{n \geq 1} \{\phi_n\}} = X$
- (ii) positive Konstanten  $m, M$  existieren, so dass für beliebige  $N \in \mathbb{N}$  und beliebige Skalare  $\alpha_n, n = 1, \dots, N$  gilt

$$m \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2.$$

Es ist hierbei zu bemerken, dass zwar **jede orthonormale Basis eines Funktionenraums eine Riesz-Basis darstellt**, der Begriff jedoch **nicht die Orthogonalität der Eigenfunktionen bedingt**, so dass allgemeinere und insbesondere nicht-selbstadjungierte lineare Operatoren (vgl. Beispiel 3.8) analysiert werden können.

#### Lemma 3.3

Sei  $A$  ein abgeschlossener linearer Operator im Hilbertraum  $X$  mit einfachen Eigenwerten  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  und zugehörigen Eigenfunktionen  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$  die eine Riesz-Basis bilden. Dann gelten:

- (i) Die Eigenfunktionen  $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$  des adjungierten Operators  $A^*$  zu den entsprechenden Eigenwerten  $\{\bar{\lambda}_n\}_{n=1}^\infty$  können so skaliert werden, dass  $\langle \phi_n, \psi_m \rangle_X = \delta_{n,m}$ .
- (ii) Jedes  $x \in X$  kann eindeutig in Form einer Fourier-Reihe

$$x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, \psi_n \rangle_X \phi_n \quad (3.77)$$

dargestellt werden, wobei Konstanten  $m, M > 0$  existieren, so dass

$$m \sum_{n=1}^\infty |\langle x, \psi_n \rangle_X|^2 \leq \|x\|_X^2 \leq M \sum_{n=1}^\infty |\langle x, \psi_n \rangle_X|^2.$$

<sup>3</sup>Hier stellt  $k(z, s)$  die so genannte Greensche Funktion dar.

(iii) Die Eigenfunktionen  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  des adjungierten Operators  $A^*$  stellen ebenfalls eine Riesz-Basis für  $X$  dar. Jedes  $x \in X$  kann somit eindeutig in Form einer Fourier-Reihe

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle_X \psi_n \quad (3.78)$$

dargestellt werden, wobei Konstanten  $m, M > 0$  existieren, so dass

$$m \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle_X|^2 \leq \|x\|_X^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n \rangle_X|^2.$$

Dies ermöglicht die Definition eines Rieszschen Operators (Curtain und Zwart, 1995; Tucsnak und Weiss, 2009).

### Definition 3.9: Rieszscher Operator

Sei  $A$  ein abgeschlossener, linearer Operator im Hilbertraum  $X$  mit einfachen Eigenwerten  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  und zugehörigen, eine Riesz-Basis für  $X$  bildende, Eigenfunktionen  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Der Operator  $A$  wird **Rieszscher Operator** genannt, wenn der Abschluss der Menge  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  (total) unzusammenhängend<sup>4</sup> ist.

Wichtige Eigenschaften Rieszscher Operatoren sind in folgendem Satz zusammengefasst (Curtain und Zwart, 1995).

### Satz 3.8: Eigenschaften Rieszscher Operatoren

Sei  $A$  ein Rieszscher Operator mit einfachen Eigenwerten  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  und zugehörigen Eigenfunktionen  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Zudem bezeichne  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  die Menge der Eigenfunktionen des adjungierten Operators  $A^*$  mit  $\langle \phi_n, \psi_m \rangle_X = \delta_{n,m}$ . Dann gelten:

(i)  $A$  besitzt die spektrale Darstellung

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \psi_n \rangle_X \phi_n \quad (3.79)$$

für  $x \in D(A)$  mit

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \psi_n \rangle_X|^2 < \infty \right\}. \quad (3.80)$$

(ii)  $A$  ist der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  genau dann wenn  $\sup_{n \geq 1} \Re\{\lambda_n\} < \infty$ . In diesem Fall besitzt  $T(t)$  die spektrale Darstellung

$$T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \cdot, \psi_n \rangle_X \phi_n. \quad (3.81)$$

(iii) Die Wachstumsgrenze der Halbgruppe ergibt sich zu

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \left( \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \right) = \sup_{n \geq 1} \Re\{\lambda_n\}. \quad (3.82)$$

(iv) Die Resolventenmenge und das Spektrum ergeben sich zu  $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\}$  und  $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}}$ . Für  $\lambda \in \rho(A)$  ergibt sich die Resolvente zu

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle \cdot, \psi_n \rangle_X \phi_n. \quad (3.83)$$

Eine Anwendung dieses Satzes wird im Weiteren anhand einer Erweiterung des Beispiels 3.11 für die lineare Wärmeleitungsgleichung gezeigt.

<sup>4</sup>Total unzusammenhängend bezeichnet hier den Fall, dass keine Elemente  $\mu, \eta \in \overline{\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}}$  existieren, die durch eine Linie bzw. ein Segment verbunden werden können, die bzw. das vollständig in  $\overline{\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}}$  liegt.

**Beispiel 3.12 (Lineare Wärmeleitung als Rieszscher Operator).** Betrachtet wird nun das abstrakte Cauchy-Problem

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad t > 0 \quad (3.84)$$

$$x(0) = x_0 \in D(A) \quad (3.85)$$

mit  $A$  und  $D(A)$  aus (3.76). Wie obenstehend ausgeführt ergeben sich die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen des Operators  $A$  zu  $\{-(n\pi)^2\}_{n=1}^{\infty}$  und  $\{\sqrt{2} \sin(n\pi z)\}_{n=1}^{\infty}$ . Letztere bilden eine orthonormale Basis für den Raum  $X = L^2(0, 1)$ . Mit Satz 3.8(ii) folgt die Lösung zu (3.84), (3.85) unmittelbar als

$$x(t) = T(t)x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2 t} \langle x_0, \sqrt{2} \sin(n\pi z) \rangle_{L^2} \sqrt{2} \sin(n\pi z).$$

Des Weiteren zeigt Satz 3.8(iii), dass  $\|T(t)\| \leq M \exp(-\pi^2 t)$  mit  $M > 0$ . Offensichtlich erlauben die Eigenschaften Rieszscher Operatoren wichtige Aussagen zum dynamischen Lösungsverhalten.

**Rieszsche Operatoren umfassen wichtige lineare Beispiele**, u.a. der Mechanik (Wellengleichung, Euler-Bernoulli Balken, Timoshenko Balken) und der Wärme- und Stoffübertragung (Diffusionsgleichung, Diffusions-Konvektions-Reaktionsgleichung). Dabei können auch gewisse örtliche Variationen der Systemparameter zugelassen werden.

## 3.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Analog zu den Betrachtungen in (Curtain und Zwart, 1995, Kapitel 4) werden die Struktureigenschaften Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit anhand der folgenden abstrakten Darstellung unendlich-dimensionaler Systeme  $\Sigma(A, B, C, D)$  mit Eingängen  $u$  und Ausgängen  $y$  eingeführt, d.h.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0 \quad (3.86)$$

$$x(0) = x_0 \in D(A) \quad (3.87)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \geq 0. \quad (3.88)$$

Im Weiteren gelten folgende Annahmen:

- (i)  $A$  ist der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  auf einem Hilbertraum  $X$
- (ii)  $B$  ist ein beschränkter linearer Operator von einem Hilbertraum  $U$  auf  $X$
- (iii)  $C$  ist ein beschränkter linearer Operator von  $X$  auf einen Hilbertraum  $Y$
- (iv)  $D$  ist ein beschränkter linearer Operator von  $U$  auf  $Y$
- (v)  $u \in L^2([0, \tau]; U) \Rightarrow \int_0^\tau |u_i(t)|^2 dt < \infty$ ,  $u_i \in U$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Unter diesen Annahmen stellt nach Curtain und Zwart, 1995, Definition 3.1.4

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (3.89)$$

eine so genannte **milde Lösung** von (3.86), (3.87) dar.

### 3.2.1 Steuerbarkeitsbegriffe für lineare SVP

Der Begriff der Steuerbarkeit bezeichnet die Möglichkeit, ein System von einem beliebigen Anfangszustand  $x_0$  innerhalb eines endlichen Zeitintervalls in einen Zustand  $x_1$  des Zustandsraumes zu überführen, d.h.

#### Definition 3.10

Ein System  $\Sigma(A, B, -, -)^5$  heißt (zustands-) **steuerbar**, wenn zu einem vorgegebenen  $x_0 \in X$  und einem vorgegebenen  $x_1 \in X$  eine Zeit  $0 < \tau < \infty$  und eine Funktion  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  so existieren, dass  $x(\tau) = x_1$  in (3.89). Ist dies für alle  $x_0 \in X$  möglich, so heißt  $\Sigma(A, B, -, -)$  **vollständig steuerbar**.

**Definition 3.11**

Der Zustand  $x_1 \in X$  wird als **erreichbar** von  $x_0 \in X$  bezeichnet, wenn eine Zeit  $\tau > 0$  und eine Funktion  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  so existieren, dass  $x(\tau) = x_1$  in (3.89).

Im Unterschied zu endlich-dimensionalen zeitkontinuierlichen linearen Systemen, sind Steuerbarkeit und Erreichbarkeit für unendlich-dimensionale System nicht mehr äquivalent. Des Weiteren existieren für letztere vielfältige Steuerbarkeits- und Erreichbarkeitsbegriffe. Die weiteren Betrachtungen sind deshalb als eine erste Einführung zu verstehen. Hierzu ist der Begriff der **Steuerbarkeitsabbildung** notwendig, dessen Definition sich leicht aus der Lösung der Zustandsgleichungen gemäß (B.5) ableiten lässt.

**Definition 3.12**

Die beschränkte lineare Abbildung  $B^\tau : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow X$

$$B^\tau u := \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds \quad (3.90)$$

für  $\Sigma(A, B, -, -)$  innerhalb  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ) wird als **Steuerbarkeitsabbildung** bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Definition können nun die Begriffe exakte und approximative Steuerbarkeit anschaulich erläutert werden.

**Definition 3.13**

Das System  $\Sigma(A, B, -, -)$  ist **exakt steuerbar** innerhalb  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ), falls jeder Punkt des Zustandsraumes  $X$  von dessen Ursprung<sup>6</sup>  $x'$  aus für  $t = \tau$  erreicht werden kann, d.h. falls

$$\text{ran}B^\tau = X. \quad (3.91)$$

Dies bedeutet, dass der Bildbereich von  $B^\tau$ ,  $\text{ran}B^\tau = \{\tilde{x} \in X : \tilde{x} = B^\tau u, u \in L^2([0, \tau]; U)\}$ , dem gesamten Zustandsraum  $X$  entspricht. Somit existiert zu jedem  $x' \in X$  und jedem  $x_1 \in X$  ein Eingang  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  so, dass  $X \ni \tilde{x} = B^\tau u$  sich zu  $\tilde{x} = x_1 - T(\tau)x'$  ergibt, woraus nach (3.89)  $x(\tau) = x_1$  folgt.

Der folgende Satz zeigt jedoch, dass exakte Steuerbarkeit u.a. immer dann verloren geht, wenn endlich-dimensionale örtlich-verteilte Stelleingriffe untersucht werden.

**Satz 3.9**

Sei  $A$  der infinitesimale Generator der  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  im Hilbertraum  $X$ . Falls der Eingangoperator  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, X)$  für endliches  $m \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\Sigma(A, B, -, -)$  nicht exakt steuerbar für alle  $t \in [0, \tau]$ ,  $\tau < \infty$ .

*Beweis.* Im Weiteren wird gezeigt, dass für alle  $\tau > 0$  die Steuerbarkeitsabbildung  $B^\tau$  unter den Voraussetzungen des Satzes einen kompakten Operator mit abgeschlossenem Bildbereich  $\text{ran}B^\tau$  darstellt (siehe Appendix B.1.4), was impliziert, dass  $\text{ran}B^\tau$  endlich-dimensional sein muss (vgl. Curtain und Zwart, 1995, Lemma A.3.22g). Hierzu ist es ausreichend den Fall  $m = 1$  mit  $Bu = bu$  zu betrachten.

Sei  $t_i = \frac{i\tau}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  und sei  $F_N : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow X$  der Operator definiert durch

$$F_N u := \sum_{i=1}^N T(t_i)b \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(s)ds, \quad b \in X.$$

Da  $F_N$  beschränkt und der Bildbereich  $\text{ran}F_N$  endlich-dimensional ist, folgt nach Lemma 3.1a, dass  $F_N$  kompakt ist. Sei

$$F_\infty u = \int_0^\tau T(s)bu(s)ds$$

<sup>5</sup> $\Sigma(A, B, -, -)$  wird im Weiteren das System (3.86)–(3.88) mit  $C = D = 0$  bezeichnen.

<sup>6</sup>Aufgrund der Linearitätseigenschaft kann o.B.d.A. der Anfangszustand  $x_0$  in den Ursprung  $x'$  des Zustandsraumes  $X$  transformiert werden.

und betrachte

$$\begin{aligned} \|F_N u - F_\infty u\|_X &= \left\| \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} [T(s)\mathbf{b} - T(t_i)\mathbf{b}]u(s)ds \right\|_X \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|T(s)\mathbf{b} - T(t_i)\mathbf{b}\|_X |u(s)|ds \\ &\leq \sum_{i=1}^N \epsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u(s)|ds, \quad N \text{ hinreichend gross.} \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ist eine direkte Konsequenz aus der Äquivalenz der starken Stetigkeit der  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  (für jedes  $\mathbf{b} \in X$  gilt  $\|T(s)\mathbf{b} - T(t_i)\mathbf{b}\|_X \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow t_i$ ) und der Beschränktheit von  $\|T(t)\|$  in jedem endlichen Teilintervall von  $[0, \infty)$  – siehe Curtain und Zwart, 1995, Satz 2.1.6. Mit der Hölderschen Ungleichung  $(\int_0^\tau |u(s)v(s)|ds \leq \|u\|_{L^p([0,\tau])}\|v\|_{L^q([0,\tau])}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$  folgt, dass

$$\|F_N u - F_\infty u\|_X \leq \epsilon \|u\|_{L^2} \sqrt{\tau},$$

wobei  $\epsilon \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ . Wegen der gleichmäßigen Konvergenz stellt  $F_\infty$  einen kompakten Operator dar, woraus direkt die Kompaktheit von  $\mathcal{B}^\tau$  folgt. Für kompakte Operatoren gilt jedoch, dass ihr Bildbereich abgeschlossen ist, wenn die Dimension des Bildbereichs endlich-dimensional ist. Hinsichtlich Definition 3.13 bedeutet dies, dass die notwendige Abgeschlossenheit von  $\text{ran}\mathcal{B}^\tau$  dessen endliche Dimension impliziert, weshalb exakte Steuerbarkeit mit  $\text{ran}\mathcal{B}^\tau = X$ ,  $\dim X = \infty$  nicht gegeben sein kann.  $\square$

Offensichtlich muss der Steuerbarkeitsbegriff abgeschwächt werden um aus praktischer Sicht realisierbare Szenarien zu analysieren. Dies führt zum Begriff der approximativen Steuerbarkeit, die das **generische Steuerbarkeitskonzept für unendlich-dimensionale Systeme repräsentiert**.

#### Definition 3.14

Das System  $\Sigma(A, B, -, -)$  ist **approximativ steuerbar** innerhalb  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ), falls es für beliebiges  $\epsilon > 0$  möglich ist, vom Ursprung  $\mathbf{x}'$  jeden Punkt des Zustandsraumes zum Zeitpunkt  $\tau$  bis auf eine Distanz  $\epsilon$  zu erreichen, d.h.

$$\overline{\text{ran}\mathcal{B}^\tau} = X, \tag{3.92}$$

mit  $\overline{\text{ran}\mathcal{B}^\tau}$  dem Abschluss von  $\text{ran}\mathcal{B}^\tau$ .

Um diese Definition genauer zu erläutern (vgl. Russell, 1978), wird die milde Lösung (3.89) zum Zeitpunkt  $t = \tau$  ( $0 < \tau < \infty$ ) betrachtet ( $\mathbf{x}_0$  wird redundant zu  $\mathbf{x}'$  verwendet)

$$S(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\tau)) := \mathbf{x}(\tau) - T(\tau)\mathbf{x}_0 = \mathcal{B}^\tau \mathbf{u}.$$

Gilt nun (3.92), so existiert zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\mathbf{u}_\epsilon$ , so dass

$$\|\mathcal{B}^\tau \mathbf{u}_\epsilon - S(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\tau))\| < \epsilon.$$

Dies bedeutet, es existiert ein  $\mathbf{x}_\epsilon$  mit  $\|\mathbf{x}_\epsilon\| < \epsilon$  und der Eigenschaft

$$T(\tau)\mathbf{x}_0 + \mathcal{B}^\tau \mathbf{u}_\epsilon = \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{x}_\epsilon.$$

so dass  $\mathbf{u}_\epsilon$  den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  auf den Endzustand  $\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{x}_\epsilon$  mit Abstand  $\epsilon$  zu  $\mathbf{x}(\tau)$  steuert.

#### Anmerkung 3.6

Für lineare endlich-dimensionale Systeme sind die Definitionen 3.13 und 3.14 äquivalent, da hier  $\overline{\text{ran}\mathcal{B}^\tau} = \text{ran}\mathcal{B}^\tau$ .

### 3.2.2 Beobachtbarkeitsbegriffe für lineare SVP

Dual zur Steuerbarkeit ist die Beobachtbarkeit (Russell, 1978; Curtain und Zwart, 1995). Auch hier existieren vielfältige Beobachtbarkeitsbegriffe, wobei im Folgenden nur die wichtigsten erläutert werden sollen. Es zeigt sich

wiederum, dass analog zur Steuerbarkeitsabbildung, der Begriff der Beobachtbarkeitsabbildung von entscheidender Bedeutung ist. Hierzu soll die milde Lösung (3.89) in Verbindung mit der Ausgangsgleichung (3.88) betrachtet werden, wobei  $B = 0$ ,  $D = 0$  (autonomes System ohne Durchgriff) angenommen sei, d.h.

$$\mathbf{y}(t) = CT(t)\mathbf{x}_0. \quad (3.93)$$

Die Beobachtbarkeitsabbildung ergibt sich somit entsprechend der folgenden Definition

**Definition 3.15**

Die beschränkte lineare Abbildung  $C^\tau : X \rightarrow L^2([0, \tau]; Y)$

$$C^\tau \mathbf{x} := CT(\cdot)\mathbf{x}$$

für  $\Sigma(A, -, C, -)$  innerhalb  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ) wird als **Beobachtbarkeitsabbildung** bezeichnet.

Dies erlaubt in Analogie zum Steuerbarkeitsbegriff die Definition von **exakter und approximativer Beobachtbarkeit** (Curtain und Zwart, 1995).

**Definition 3.16**

Das System  $\Sigma(A, -, C, -)^7$  ist **exakt beobachtbar** innerhalb  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ), wenn der Anfangszustand eindeutig und stetig aus der Kenntnis des Ausgangs in  $L^2([0, \tau]; Y)$  bestimmt werden kann, d.h.  $C^\tau$  ist injektiv mit beschränkter Inverser in  $\text{ran}C^\tau$ .

Um diesen Begriff zu erläutern, müssen einige funktionalanalytische Grundbegriffe eingeführt werden.

**Definition 3.17**

Ein Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  zwischen linearen Räumen  $X$  und  $Y$  ist **invertierbar**, wenn eine Abbildung  $S : D(S) := \text{ran}A \subset Y \rightarrow X$  existiert, so dass

$$SA\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in D(A)$$

$$AS\mathbf{y} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \text{ran}A.$$

$S = A^{-1}$  wird **algebraische Inverse** von  $A$  genannt.

**Lemma 3.4**

Sei  $A$  ein linearer Operator von  $X$  nach  $Y$ . Dann gilt,  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $A$  injektiv ist, d.h.  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  impliziert  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Exakte Beobachtbarkeit bedeutet somit, dass aus  $C^\tau \mathbf{x} = \mathbf{0}$  unmittelbar  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  folgt bzw. aus  $C^\tau \mathbf{x}_1 = C^\tau \mathbf{x}_0$  eindeutig  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0$  folgt (**Zustände sind eindeutig unterscheidbar**). Beschränktheit eines linearen Operators impliziert dessen Stetigkeit (Curtain und Zwart, 1995, Theorem A.3.10).

**Definition 3.18**

Das System  $\Sigma(A, -, C, -)$  ist **approximativ beobachtbar** innerhalb  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ), wenn der Anfangszustand eindeutig aus der Kenntnis des Ausgangs in  $L^2([0, \tau]; Y)$  bestimmt werden kann, d.h.

$$\ker C^\tau = \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in X : C^\tau \mathbf{x} = \mathbf{0}\}. \quad (3.94)$$

Diese Definition besagt, dass nur der Ursprung des Zustandsraumes auf  $\mathbf{0}$  abgebildet wird, d.h. es existiert kein  $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $C^\tau \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Die Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit wird durch das folgende Lemma illustriert (Curtain und Zwart, 1995, Theorem 4.1.13)

**Lemma 3.5**

Sei  $\Sigma(A, -, C, -)$  ein lineares System, dann gelten:

<sup>7</sup> $\Sigma(A, -, C, -)$  wird im Weiteren das System (3.86)–(3.88) mit  $B = D = 0$  bezeichnen.

- (i) System  $\Sigma(A, -, C, -)$  ist genau dann approximativ beobachtbar innerhalb  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ), wenn das duale System  $\Sigma(A^*, C^*, -, -)$  approximativ steuerbar innerhalb der selben Zeitspanne ist.
- (ii) System  $\Sigma(A, -, C, -)$  ist genau dann exakt beobachtbar innerhalb  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ), wenn das duale System  $\Sigma(A^*, C^*, -, -)$  exakt steuerbar innerhalb der selben Zeitspanne ist.

### Anmerkung 3.7

Oftmals ist es leichter die **Nicht-Beobachtbarkeit** zu verifizieren. Sei  $\mathbf{x}(\cdot, t) = \mathbf{x}(t) = T(t)\mathbf{x}_0$  mit  $T(t)$  der  $C_0$ -Halbgruppe zum infinitesimalen Generator  $A$ , dann gilt für den Vektor der Messgrößen  $\mathbf{y}(t) = CT(t)\mathbf{x}_0$ . Das System ist nicht beobachtbar, falls Zustände  $\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)} \in X$  mit  $\mathbf{x}_0^{(1)} \neq \mathbf{x}_0^{(2)}$  so existieren, dass  $CT(t)\mathbf{x}_0^{(1)} = CT(t)\mathbf{x}_0^{(2)}$  für  $t \in [t_0, t_1]$ . Die Zustände  $\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}$  sind in diesem Fall **nicht unterscheidbar** was der Beobachtbarkeit widerspricht.

## 3.2.3 Nachweis approximativer Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit

Erwartungsgemäß ist der Nachweis exakter Steuerbarkeit bzw. exakter Beobachtbarkeit schwierig und oftmals nicht möglich. Es zeigt sich jedoch, dass direkte (notwendige und hinreichende) Kriterien zum Nachweis von approximativer Steuerbarkeit bzw. approximativer Beobachtbarkeit existieren. Nach Curtain und Zwart, 1995 können somit die approximativ bezeichneten Struktureigenschaften als *generische* Erweiterung der bekannten Begriffe aus der endlich-dimensionalen Systemtheorie angesehen werden. Das folgende Theorem liefert einen direkten Nachweis der approximativen Steuerbarkeit bzw. approximativen Beobachtbarkeit von Rieszschen Spektral-Operatoren (Curtain und Zwart, 1995, S. 164).

### Satz 3.10

Sei  $\Sigma(A, B, C, -)$  ein lineares System mit Rieszischem Spektral-Operator  $A$  auf einem Hilbertraum  $X$ , d.h. es existieren einfache Eigenwerte  $\lambda_n$ , Eigenfunktionen  $\phi_n(z)$ , adjungierte Eigenfunktionen  $\psi_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , so dass  $A\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \mathbf{x}, \psi_n \rangle \phi_n$ . Des Weiteren seien  $B$  und  $C$  Operatoren der Form

$$B\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i u_i \quad \mathbf{b}_i \in X \quad (3.95)$$

$$C\mathbf{x} = [\langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_p \rangle]^T \quad \mathbf{c}_i, \mathbf{x} \in X. \quad (3.96)$$

Das System  $\Sigma(A, B, -, -)$  ist genau dann approximativ steuerbar, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Rang}(\langle \mathbf{b}_1, \psi_n \rangle, \dots, \langle \mathbf{b}_m, \psi_n \rangle) = 1. \quad (3.97)$$

Das System  $\Sigma(A, -, C, -)$  ist genau dann approximativ beobachtbar, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Rang}(\langle \mathbf{c}_1, \phi_n \rangle, \dots, \langle \mathbf{c}_p, \phi_n \rangle) = 1. \quad (3.98)$$

Eine anschauliche Begründung für die Ergebnisse von Satz 3.10 wird im Folgenden aufgeführt.

- **Nachweis approximativer Steuerbarkeit für ein Rieszisches System:** Gemäß den Voraussetzungen von Satz 3.10 und den Ausführungen in Abschnitt 3.1.3.4 folgt für das System

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad t > 0$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in D(A),$$

dass

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \left( \underbrace{\langle \dot{\mathbf{x}}, \psi_n \rangle}_{= \dot{\mathbf{x}}_n(t)} - \lambda_n \underbrace{\langle \mathbf{x}, \psi_n \rangle}_{= \mathbf{x}_n(t)} \right) \phi_n, \psi_m \right\rangle = \langle B\mathbf{u}, \psi_m \rangle.$$

Aufgrund der Biorthonormalität, d.h.  $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{n,m}$  ergibt sich unmittelbar

$$\dot{x}_n(t) - \lambda_n x_n(t) = \langle Bu, \psi_n \rangle \stackrel{(3.95)}{=} \sum_{i=1}^m \langle b_i, \psi_n \rangle u_i(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Anschaulich impliziert Steuerbarkeit, dass jeder Fourier-Koeffizient bzw. spektrale oder modale Zustand  $x_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  durch mindestens ein  $u_i(t)$  angesteuert wird, d.h.

$$\text{Rang}(\langle b_1, \psi_n \rangle, \dots, \langle b_m, \psi_n \rangle) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für die obige Analyse muss vorausgesetzt werden, dass die Eigenwerte  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  disjunkt sind. Im Fall von Mehrfacheigenwerten sind weitere Analysen notwendig, wobei die Steuerbarkeitsaussage insbesondere von der algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheit der Eigenwerte abhängig ist.

- **Nachweis approximativer Beobachtbarkeit für ein Rieszisches System:** Gemäß den Voraussetzungen von Satz 3.10 und den Ausführungen in Abschnitt 3.1.3.4 folgt für das System

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), & t > 0 \\ x(0) &= x_0 \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

mit

$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0,$$

dass

$$y = Cx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle C \phi_n \stackrel{(3.96)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \phi_n, c_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_n, c_p \rangle \end{bmatrix}}_{= C_n}.$$

Anschaulich impliziert Beobachtbarkeit, dass das Messsignal  $y(t)$  Information von allen spektralen bzw. modalen Zuständen  $\langle x, \psi_n \rangle$  beinhaltet, d.h.

$$\text{Rang}(\langle c_1, \phi_n \rangle, \dots, \langle c_p, \phi_n \rangle) = 1.$$

Systeme, die den Bedingungen von Satz (3.97) genügen, werden oft auch als **modal steuerbar** bezeichnet, d.h. jede Eigenmode kann gesteuert werden. Im Allgemeinen ist dies nicht äquivalent zur approximativen Steuerbarkeit, dies gilt jedoch für Rieszische Operatoren. Hierbei gibt es jedoch die Einschränkung, dass modale Steuerbarkeit nicht notwendigerweise äquivalent zur approximativen Steuerbarkeit innerhalb  $[0, \tau]$  für beliebiges  $0 < \tau < \infty$  ist. Ein Beispiel hierzu liefert die lineare Wellengleichung (Beispiel 3.14), die aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit eine minimale Steuerzeit erfordert. Des Weiteren müssen zum Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsnachweis für **Nicht-Rieszische Operatoren** andere Methoden angewendet werden (siehe Beispiel 3.15).

**Beispiel 3.13 (Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsnachweis für die lineare Wärmeleitungsgleichung).**  
Für die in Abbildung 3.1 dargestellte Konfiguration

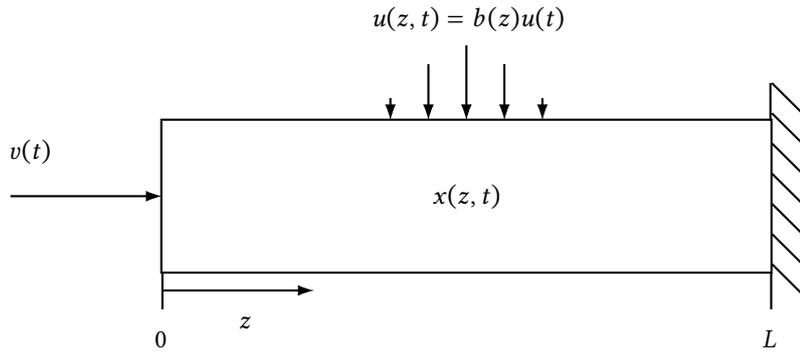


Abb. 3.1: Konfiguration des Wärmeleiters.

ergeben sich die Gleichungen für die Temperaturentwicklung im einseitig ideal-isolierten Stab zu

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} - \alpha x(z, t) + b(z)u(t) \quad z \in (0, L), t > 0 \quad (3.99)$$

$$x(0, t) = v(t), \quad \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0 \quad t > 0 \quad (3.100)$$

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad z \in [0, L]. \quad (3.101)$$

Mittels des in Beispiel 3.7 eingeführten Ansatzes zur Homogenisierung von RBn, kann obiges System in einem erweiterten Zustandsraum dargestellt werden. Im Folgenden werden (3.99)–(3.101) jedoch mittels des Greenschen Satzes in die modale bzw. spektrale Darstellung überführt. Dies entspricht im Wesentlichen der abstrakten Betrachtungsweise im Sinne von  $C_0$ -Halbgruppen und deren Generatoren.

Mit den Rieszschen Eigenschaften des selbst-adjungierten Systemoperators

$$Ax = a \frac{d^2 x}{dz^2} - \alpha x$$

nach Abschnitt 3.1.3.4 und der Einführung spektraler bzw. modaler Zustände  $x_k(t) = \langle x(z, t), \psi_k(z) \rangle$  im Zustandsraum  $X = L^2(0, L)$  ergibt sich die spektrale Darstellung von (3.99)–(3.101) zu

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \lambda_k x_k(t) + \underbrace{\int_0^L b(z) \psi_k(z) dz}_{= b_k} u(t) + \underbrace{a \frac{d\psi_k}{dz}(0)}_{= \bar{b}_k} v(t), \quad t > 0, k \in \mathbb{N} \quad (3.102)$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_k = -[a(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L})^2 + \alpha]$  und den Eigenfunktionen  $\psi_k(z) = \phi_k(z) = \sqrt{2/L} \sin(\frac{2k-1}{2} \pi \frac{z}{L})$ , wobei  $\langle \psi_k(z), \phi_m(z) \rangle = \delta_{k,m}$ . Im Folgenden wird zunächst die modale bzw. approximative Steuerbarkeit des Systems für den Fall des Randeingriffs bzw. örtlich-verteilten Eingriffes analysiert.

- Seien  $u(t) = 0$  und  $v(t) \neq 0$  (**Randeingriff**): Offensichtlich vereinfacht sich (3.102) zu

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \lambda_k x_k(t) + \bar{b}_k v(t) \quad \text{mit} \quad \bar{b}_k = \sqrt{\frac{2}{L}} a \left( \frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L} \right).$$

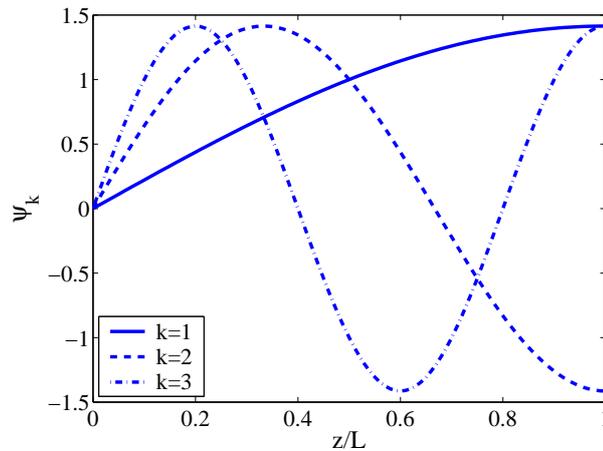
Wegen  $\lambda_k \neq \lambda_m$  für  $k \neq m$  und  $\bar{b}_k \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist das System über den Rand modal bzw. approximativ steuerbar.

- Seien  $u(t) \neq 0$  und  $v(t) = 0$  (**örtlich-verteilter Eingriff**): In diesem Fall folgt aus (3.102), dass

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \lambda_k x_k(t) + b_k u(t) \quad \text{mit} \quad b_k = \int_0^L b(z) \psi_k(z) dz,$$

womit die Eigenschaft der modalen Steuerbarkeit direkt mit der geeigneten Wahl der Ortscharakteristik des Eingriffes zusammenhängt. Dieses **Design-Problem** soll im Weiteren anhand eines punktförmigen Eingriffes,

d.h.  $b(z) = \delta(z - \zeta)$ ,  $\zeta \in (0, L)$  untersucht werden. Wegen  $\lambda_k \neq \lambda_m$  für  $k \neq m$  ist die Steuerbarkeit des Systems genau dann gewährleistet, wenn  $b_k = \int_0^L \delta(z - \zeta) \psi_k(z) dz = \psi_k(\zeta) = \sqrt{2/L} \sin(\frac{2k-1}{2} \pi \frac{\zeta}{L}) \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Der Verlauf der Eigenfunktionen  $\psi_k(z)$  ist in Abbildung 3.2 dargestellt.



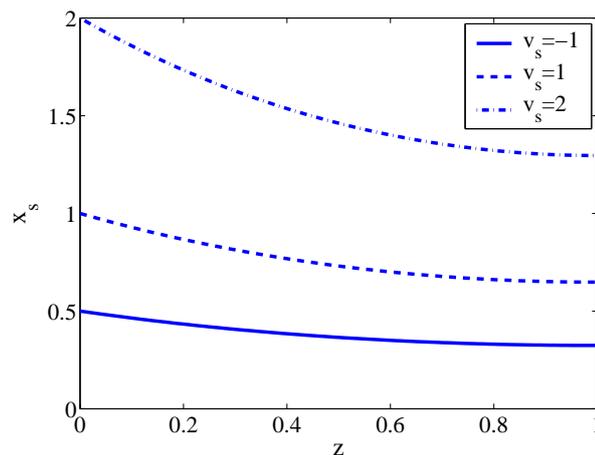
**Abb. 3.2:** Verlauf der Eigenfunktionen  $\psi_k(z) = \sqrt{2/L} \sin(\frac{2k-1}{2} \pi \frac{z}{L})$  für  $k = 1, 2, 3$  und  $L = 1$ .

Hieraus ist leicht ersichtlich, dass der Eingriffsort nicht mit einem Knoten der Eigenfunktionen zusammenfallen darf. Somit muss gelten, dass

$$\frac{2k-1}{2} \pi \frac{\zeta}{L} \neq m\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\zeta}{L} \neq \frac{2m}{2k-1} = \frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}, \quad k, m \in \mathbb{N}$$

bzw. dass  $\zeta/L$  eine **irrationale Zahl** sein muss.

- **Erreichbarkeit stationärer Profile:** Es sollte an dieser Stelle betont werden, dass der Nachweis der Steuerbarkeit und die speziell für viele verteilt-parametrischen Systeme wichtige Aufgabenstellung des Nachweises der Einstellbarkeit bzw. Erreichbarkeit eines stationären Profils bzw. Arbeitspunktes verschiedene, einander nicht äquivalente Fragestellungen sind. Beispielsweise ergibt sich für das betrachtete Beispiel des Wärmeleiters mit  $u(t) = 0$  die stationäre Lösung zu  $x_s(z) = \cosh(\sqrt{\frac{\alpha}{a}}[L-z]) / \cosh(\sqrt{\frac{\alpha}{a}}L) v_s$ . Die Variation von  $v_s \in \mathbb{R}$  liefert die Menge der über den Randeingriff erreichbaren stationären Profile. Exemplarisch zeigt Abbildung 3.3 einige der erreichbaren stationären Profile.



**Abb. 3.3:** Durch Randeingriff  $v_s$  erreichbare stationäre Profile  $x_s(z)$  für  $\sqrt{\alpha/a} = 1$  und  $L = 1$ .

Wie in den allgemeinen Ausführungen gezeigt wurde, erfolgt der Nachweis modaler bzw. approximativer Beobachtbarkeit für Rieszsche Systeme direkt analog zum Steuerbarkeitsnachweis. Beispielsweise gilt im Fall einer

punktförmigen Messung mit Ortscharakteristik  $c(z) = \delta(z - \bar{\zeta})$ ,  $\bar{\zeta} \in (0, L)$ , dass

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \underbrace{\langle \psi_k(z), c(z) \rangle}_{= \psi_k(\bar{\zeta})} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2k-1}{2} \pi \frac{\bar{\zeta}}{L}\right)}_{= c_k}.$$

Offensichtlich ist das System genau dann modal beobachtbar, wenn  $c_k \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dieses **Design-Problem** zur geeigneten Wahl des Messortes  $\bar{\zeta}$  ist lösbar, falls der Messort nicht mit einem Knoten der Eigenfunktionen  $\psi_k(z)$  zusammenfällt. Dies ist genau dann der Fall wenn

$$\frac{\bar{\zeta}}{L} \neq \frac{2p}{2k-1} = \frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}, \quad k, p \in \mathbb{N},$$

bzw.  $\bar{\zeta}/L$  eine **irrationale Zahl** ist. Ein Vergleich mit den obigen Ausführungen illustriert die bekannte Dualität zwischen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

**Beispiel 3.14 (Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeitsnachweis für die lineare Wellengleichung).** Im vorangegangenen Beispiel konnte anhand des Beispiels der linearen Wärmeleitungsgleichung approximative Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit nachgewiesen werden, wobei sich keine Einschränkung an die Steuerzeit  $\tau$  gemäß Definition 3.14 ergaben. Entsprechend der Ausführungen in Kapitel 1 zur Charakterisierung von SVPn sind jedoch für hyperbolische Systeme, wie die lineare Wellengleichung, abweichende Ergebnisse zu erwarten. Um diese zu illustrieren wird im Folgenden anhand der PDgl.

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, L), \quad t > 0 \quad (3.103)$$

mit RBn und ABn

$$x(0, t) = v(t), \quad \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.104)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z), \quad z \in [0, L], \quad (3.105)$$

der Nachweis approximativer Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit mittels Methoden der so-*genannten nicht-harmonischen Fourier-Analyse* erbracht (siehe z.B. Russell, 1967). Aufgrund der Riesz'schen Eigenschaften des Systemoperators kann direkt (z.B. mittels des Greenschen Satzes) die spektrale Darstellung von (3.103)–(3.105) in der Form

$$\frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} = \underbrace{c^2 \lambda_k}_{= -\mu_k^2} x_k(t) + c^2 \underbrace{\frac{d\psi_k}{dz}(0)}_{= b_k} v(t), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.106)$$

$$x_k(t)(0) = x_{k,0} = \langle x_0(z), \psi_k(z) \rangle \quad (3.107)$$

$$\frac{dx_k(t)}{dt}(0) = x_{k,1} = \langle x_1(z), \psi_k(z) \rangle. \quad (3.108)$$

ermittelt werden. Die entsprechende Eigenwertaufgabe ist selbst-adjungiert mit orthonormalen Eigenfunktionen  $\psi_k(z) = \phi_k(z) = \sqrt{2/L} \sin(\frac{2k-1}{2} \pi \frac{z}{L})$  und diskreten Eigenwerten  $\lambda_k = -(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L})^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Die Gesamtlösung kann somit leicht mittels Fourier-Synthese (vgl. (B.6)) ermittelt werden

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ x_{k,0} \cos(\mu_k t) + \frac{x_{k,1}}{\mu_k} \sin(\mu_k t) \right] \psi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z) \frac{b_k}{\mu_k} \int_0^t \sin(\mu_k(t-\tau)) v(\tau) d\tau. \quad (3.109)$$

Die weitere Analyse betrifft die Analyse der Null-Steuerbarkeit. Es wird somit die Frage beantwortet, ob unter der Voraussetzung, dass  $x_0(z) \neq 0$  und  $x_1(z) \neq 0$  gegeben sind eine Funktion  $v(t)$  und ein Zeitintervall  $t = [0, T]$ ,  $T > 0$  so existieren, dass  $x(z, T) = 0$  und  $\frac{\partial x}{\partial t}(z, T) = 0$  gelten.

Aus (3.109) folgt, dass

$$0 = x(z, T)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z) \left[ \underbrace{x_{k,0} \cos(\mu_k T) + \frac{x_{k,1}}{\mu_k} \sin(\mu_k T) + \frac{b_k}{\mu_k} \int_0^T \sin(\mu_k(T-\tau))v(\tau)d\tau}_{=: \alpha_k} \right] \\
&= \frac{\partial x}{\partial t}(z, T) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z) \left[ \underbrace{-\mu_k x_{k,0} \sin(\mu_k T) + x_{k,1} \cos(\mu_k T) + b_k \int_0^T \cos(\mu_k(T-\tau))v(\tau)d\tau}_{=: \beta_k} \right].
\end{aligned}$$

Offensichtlich stellen  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  die Fourier-Koeffizienten der Eingangsfunktion  $v(t)$  dar. Des Weiteren ergeben sich hieraus unmittelbar Gleichungen zur expliziten Bestimmung von  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Dabei müssen jedoch gewisse Existenzbedingungen erfüllt sein, deren Bestimmung der Gegenstand der folgenden Ausführungen ist. Mit

$$\alpha_k = \int_0^T \sin(\mu_k(T-\tau))v(\tau)d\tau = \int_0^T \sin(\mu_k\tau) \underbrace{v(T-\tau)}_{=\bar{v}(\tau)} d\tau$$

und

$$\beta_k = \int_0^T \cos(\mu_k(T-\tau))v(\tau)d\tau = \int_0^T \cos(\mu_k\tau)\bar{v}(\tau)d\tau$$

folgt somit wegen  $\mu_k = (2k-1)\pi c/(2L)$ , dass

$$\alpha_k = \int_0^T \sin(k\omega\tau)\bar{v}(\tau)d\tau, \quad \beta_k = \int_0^T \cos(k\omega\tau)\bar{v}(\tau)d\tau$$

wobei  $k\omega = (2k-1)\pi c/(2L)$ . Ein Vergleich mit den Bestimmungsgleichungen der Koeffizienten einer Fourier-Reihe liefert die Bedingung, dass

$$\frac{2\pi k}{T} = k\omega = \frac{(2k-1)\pi c}{2L} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{4kL}{(2k-1)c} \rightarrow \frac{2L}{c} \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, dass mindestens die Zeitspanne  $T_s = 2L/c$  zur eindeutigen Bestimmung eines Fourier-Koeffizienten notwendig ist, weshalb  $T_s$  auch als **Mindeststeuerzeit** bezeichnet wird.

Zum Nachweis der **approximativen Beobachtbarkeit** wird die Messgröße gemäß

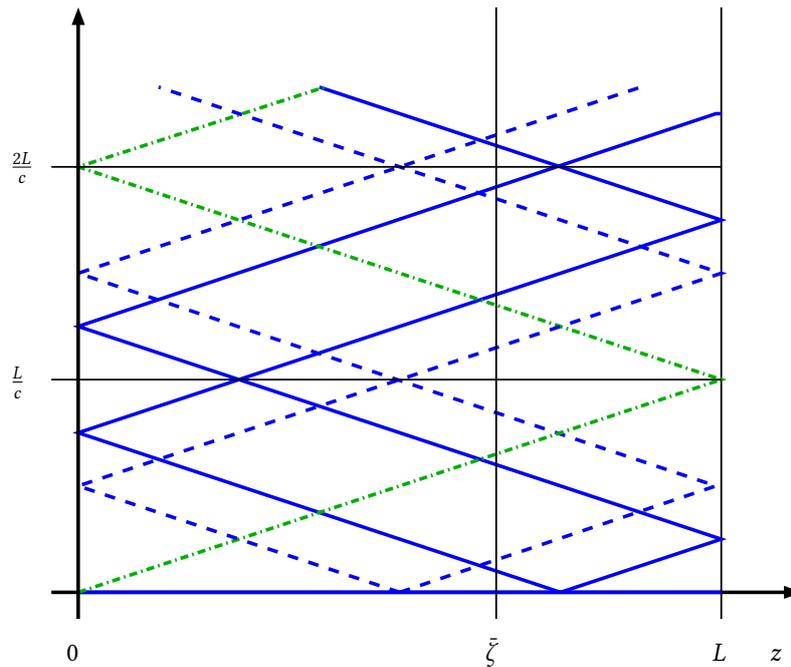
$$y(t) = Cx(\cdot, t) \quad \text{mit} \quad Cx(\cdot, t) = \int_0^L c(z)x(z, t)dz \tag{3.110}$$

definiert. Analog zu den Ausführungen zu Beispiel 3.13 gilt auch hier aufgrund der Riesz'schen Eigenschaften des Systems, dass modale bzw. approximative Beobachtbarkeit gewährleistet ist, falls  $c_k = C\psi_k(\cdot) = \int_0^L c(z)\psi_k(z)dz \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Im Fall einer punktförmigen Messung mit  $c(z) = \delta(z - \bar{\zeta})$ ,  $\bar{\zeta} \in (0, L]$  folgt ebenfalls, dass  $\bar{\zeta}/L$  eine irrationale Zahl sein muss. Darüber hinaus zeigt die Anwendung von Methoden der Fourier-Analyse, dass Beobachtbarkeit eine Mindestmesszeit erfordert. Hierzu wird analog zum Nachweis der Existenz einer Mindeststeuerzeit eine Fourier-Analyse angewandt. Mit  $v(t) = 0$  folgt aus (3.109), dass

$$y(t) = x(\bar{\zeta}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ x_{k,0} \cos(\mu_k t) + \frac{x_{k,1}}{\mu_k} \sin(\mu_k t) \right] \psi_k(\bar{\zeta}). \tag{3.111}$$

Da  $\bar{\zeta}/L$  eine irrationale Zahl ist folgt unmittelbar wegen der approximativen Beobachtbarkeit des Systems, dass  $\psi_k(\bar{\zeta}) \neq 0$  für alle  $k$ . Insbesondere ist  $y(t)$  wegen (3.111) eine periodische Funktion. Ein Vergleich mit dem allgemeinen Ansatz einer Fourier-Reihe, d.h.

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)],$$



**Abb. 3.4:** Graphische Interpretation der Existenz einer Mindeststeuerzeit bzw. Mindestmesszeit anhand der Charakteristiken für (3.103)–(3.105).

liefert die Bedingungen

$$A_0 = 0$$

$$A_k = \psi_k(\bar{\zeta}) \int_0^L x_0(z) \psi_k(z) dz$$

$$B_k = \frac{\psi_k(\bar{\zeta})}{\mu_k} \int_0^L x_1(z) \psi_k(z) dz$$

mit  $k\omega = 2k\pi/T = (2k-1)\pi c/(2L)$ . Offensichtlich gilt für die Periodendauer

$$T = \frac{4kL}{(2k-1)c} \rightarrow \frac{2L}{c} \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

weshalb sich die Mindestmesszeit zu  $T_m = 2L/c$  ergibt.

Eine graphische Interpretation liefert Abbildung 3.4. Wie in Kapitel 1.2 gezeigt erfolgt die Ausbreitung von  $x(z, t)$  entlang der Charakteristiken des Systems. Offensichtlich erfordern die Struktureigenschaften Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, dass in der  $(z, t)$ -Ebene der Eingriffsort von  $v(t)$  und der Messort für  $y(t)$  alle Charakteristiken jeweils mindestens zweimal schneiden müssen.

### Anmerkung 3.8

Offensichtlich ist die **Eigenschaft einer Mindestmess- bzw. Mindeststeuerzeit** charakteristisch für hyperbolische SVPn durch die hier auftretende endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen. Diese Eigenschaft gilt in ähnlicher Weise auch für gewisse Klassen nichtlinearer hyperbolischer SVPn, wobei die entsprechenden Nachweise einen deutlich größeren mathematischen Aufwand erfordern.

### Anmerkung 3.9

Das betrachtete Beispiel der linearen Wellengleichung ist exakt steuerbar ohne Mindeststeuerzeit falls anstelle des Randeingriffs an  $z = 0$  ein örtlich-verteilter unendlich-dimensionaler Eingang  $u(z, t)$  in der PDgl. (3.103) angenommen wird.

**Beispiel 3.15 (Beobachtbarkeitsnachweis für ein Strömungssystem).** Für Nicht-Rieszsche Systeme wird sowohl der Steuerbarkeits- als auch der Beobachtbarkeitsnachweis erschwert, da kein modaler Nachweis mittels Satz 3.10 erfolgen kann. Im Folgenden wird anhand des in Abbildung 3.5 gezeigten Beispiels eines von einem inkompressiblen Medium durchströmten Rohres gezeigt, wie der Messort geeignet zu wählen ist, um Beobachtbarkeit zu gewährleisten.

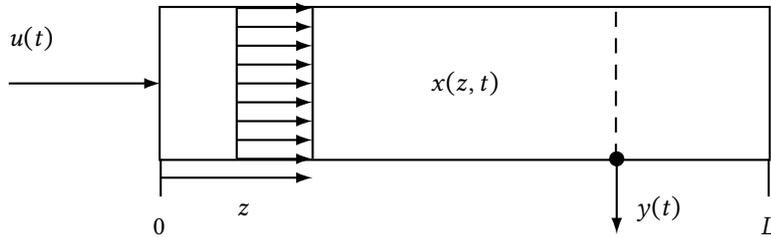


Abb. 3.5: Konfiguration des Strömungssystems.

Das System wird hierbei durch

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = 0 \quad z \in (0, L), t > 0 \quad (3.112)$$

$$x(0, t) = u(t) \quad t > 0 \quad (3.113)$$

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad z \in [0, L] \quad (3.114)$$

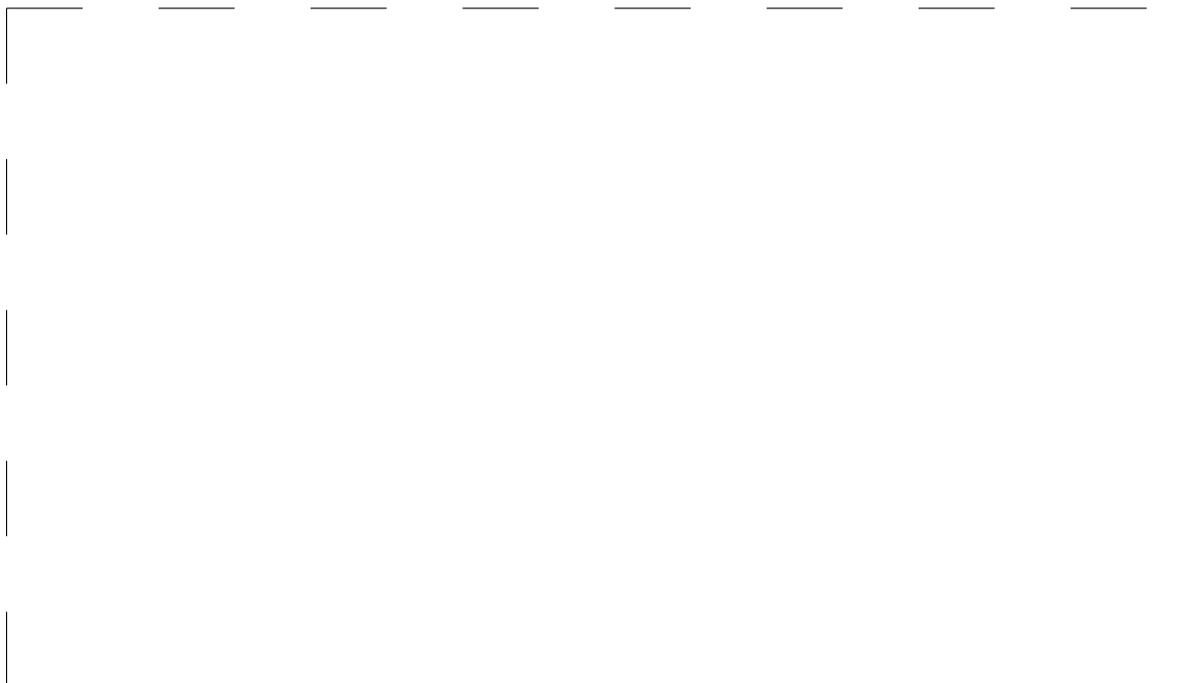
$$y(t) = x(\bar{\zeta}, t) \quad \bar{\zeta} \in [0, L], t \geq 0 \quad (3.115)$$

beschrieben. Die axiale Strömungs-Geschwindigkeit  $v$  wird als konstant angenommen. Die Messung soll an der Stelle  $\bar{\zeta} \in [0, L]$  erfolgen.

Mittels der Laplace-Transformation oder der Charakteristiken-Methode kann leicht die Lösung der PDgl. ermittelt werden. Die letztere Methode (abgeleitet aus der Klassifikation von PDgln. in Abschnitt 1.2) nutzt dabei die Information, dass die Ausbreitung entlang der Charakteristiken erfolgt, die sich hier zu

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v} \quad \text{bzw.} \quad t - t_0 = \frac{1}{v}(z - z_0)$$

ergeben. Diese sind untenstehend dargestellt.



Im Fall  $u(t) = 0$  ergibt sich somit die Lösung zu

$$x(z, t) = x_0(z - vt)\sigma(z - vt).$$

Zur Beobachtbarkeitsanalyse wird die Ausgangs- bzw. Messgröße entsprechend  $y(t) = x(\bar{\zeta}, t) = x_0(\bar{\zeta} - vt)\sigma(\bar{\zeta} - vt)$  gewählt mit  $\bar{\zeta} \in [0, L]$ . Wie obenstehend eingeführt bedingt die Eigenschaft der Beobachtbarkeit, dass sich aus der Kenntnis der Ausgangsgröße  $y(t)$ ,  $t \in (0, T_m]$  die Anfangsbedingung  $x_0(z)$ ,  $z \in [0, L]$  stetig und in eindeutiger Weise rekonstruieren lässt. Um dies zu analysieren wird die Substitution

$$z = \bar{\zeta} - vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\bar{\zeta} - z}{v}$$

in die Gleichung der Ausgangsgröße eingesetzt, d.h.

$$y\left(\frac{\bar{\zeta} - z}{v}\right) = x_0(z)\sigma(z) = x_0(z),$$

wobei sich die letzte Gleichung aus der Eigenschaft, dass  $z \geq 0$  ergibt. Die Rekonstruktion des Anfangsprofils aus der Messgröße erfordert insbesondere die Bestimmung von  $x_0(L)$ . Hierzu wird zunächst der Messort zu  $\bar{\zeta} = L - \epsilon$  mit  $\epsilon \geq 0$  gewählt. Somit ergibt sich aus der obigen Gleichung

$$x_0(L) = y\left(-\frac{\epsilon}{v}\right).$$

Da  $-\epsilon/v < 0$  für  $\epsilon > 0$  erfordert in diesem Fall die Bestimmung von  $x_0(L)$  die Kenntnis von  $y(t)$  für  $t < 0$  was einer a-Kausalität entspricht. Offensichtlich kann die Kausalität nur dann hergestellt werden wenn  $\epsilon = 0$  bzw.  $\bar{\zeta} = L$ . In diesem Fall ergeben sich

$$x_0(0) = y\left(\frac{L}{v}\right), \quad x_0(L) = y(0),$$

wobei die erste Gleichung wiederum die Existenz bzw. Notwendigkeit einer Mindestmesszeit  $T_m = L/v$  illustriert.

### Beispiel 3.16 (Steuerbarkeitsnachweis für eine örtlich 2-dimensionale Wärmeleitungsgleichung).

Im Folgenden wird die Steuerbarkeit für den Aufheizvorgang der in Abbildung 3.6 illustrierten Platte analysiert.

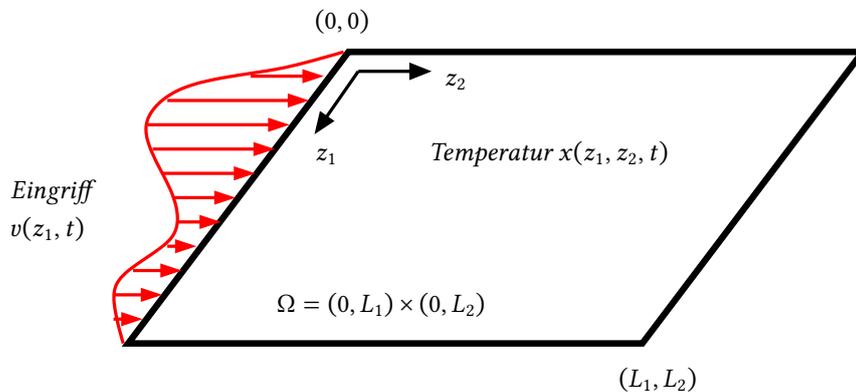


Abb. 3.6: Konfiguration des 2-dimensionalen Wärmeleiters.

Für dieses Beispiel führt eine Energiebilanzierung auf die 2-dimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z_2^2} = \Delta x \quad (z_1, z_2) \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.116)$$

$$x(0, z_2, t) = 0 = x(L_1, z_2, t) \quad z_2 \in [0, L_2], \quad t > 0 \quad (3.117)$$

$$x(z_1, 0, t) = v(z_1, t), \quad x(z_1, L_2, t) = 0 \quad z_1 \in [0, L_1], \quad t > 0 \quad (3.118)$$

$$x(z_1, z_2, 0) = x_0(z_1, z_2) \quad z \in \bar{\Omega}. \quad (3.119)$$

Die zugehörige Eigenwertaufgabe ist selbst-adjungiert

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \lambda\psi & (z_1, z_2) &\in \Omega \\ \psi(0, z_2) &= 0 = \psi(L_1, z_2) & z_2 &\in [0, L_2] \\ \psi(z_1, 0) &= 0 = \psi(z_1, L_2) & z_1 &\in [0, L_1]\end{aligned}$$

mit Eigenwerten  $\lambda_{k,l}$  und Eigenfunktionen  $\phi_{k,l}(z_1, z_2) = \psi_{k,l}(z_1, z_2)$  entsprechend

$$\lambda_{k,l} = -\pi^2 \left[ \left( \frac{k}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{l}{L_2} \right)^2 \right] \quad (3.120)$$

$$\psi_{k,l}(z_1, z_2) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{k\pi}{L_1} z_1\right) \sin\left(\frac{l\pi}{L_2} z_2\right) \quad (3.121)$$

mit  $k, l \in \mathbb{N}$ . Somit kann das System (3.116)–(3.119) mittels des Greenschen Satzes in die spektrale Darstellung mit  $x_{k,l}(t) := \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} x(z_1, z_2, t) \psi_{k,l}(z_1, z_2) dz_2 dz_1$  überführt werden

$$\frac{dx_{k,l}(t)}{dt} = \lambda_{k,l} x_{k,l}(t) + \int_0^{L_1} \frac{\partial \psi_{k,l}}{\partial z_2}(z_1, 0) v(z_1, t) dz_1 \quad t > 0 \quad (3.122)$$

$$x_{k,l}(0) = x_{k,l}^0 \quad k, l \in \mathbb{N}. \quad (3.123)$$

Alternativ können die Gleichungen (3.116)–(3.119) anhand des in Beispiel 3.7 illustrierten Ansatzes zur Homogenisierung von RBN, in einem erweiterten Zustandsraum dargestellt werden.

Im Folgenden wird die modale bzw. approximative Steuerbarkeit in Abhängigkeit der Art des Eingriffs untersucht:

- örtlich kontinuierlicher Eingriff bzgl.  $z_1$ , d.h.  $v(z_1, t) \neq b(z)v(t)$
- ortsdiskreter Eingriff, d.h.  $v(z_1, t) = b(z_1)v(t)$

Hierzu muss jedoch zunächst das Punktspektrum, also die Menge der Eigenwerte des Systemoperators untersucht werden. Offensichtlich gilt für mehrfache Eigenwerte, dass

$$\lambda_{k,l} = \lambda_{m,n} \Leftrightarrow \left( \frac{k}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{l}{L_2} \right)^2 = \left( \frac{m}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_2} \right)^2 \Leftrightarrow \left( \frac{k^2 - m^2}{n^2 - l^2} \right)^2 = \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^2.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass für ein rationales Längenverhältnis, d.h.  $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$ , mehrfache Eigenwerte auftreten können. Als Beispiel sei  $L_1 = L_2 = L$  betrachtet, woraus sich  $\lambda_{k,l} = -(\frac{\pi}{L})^2(k^2 + l^2) = \lambda_{l,k}$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$  ergibt. Des Weiteren ist zu **beachten**, dass aus  $\lambda_{k,l} = \lambda_{m,n}$  nicht notwendigerweise  $\psi_{k,l} = \psi_{m,n}$  folgt. Im Fall  $L_1 = 2L_2$  gilt beispielsweise, dass  $\lambda_{4,1} = \lambda_{2,2}$  aber  $\psi_{4,1} \sim \sin(\frac{2\pi z_1}{L_2}) \sin(\frac{\pi z_2}{L_2})$  während  $\psi_{2,2} \sim \sin(\frac{\pi z_1}{L_2}) \sin(\frac{2\pi z_2}{L_2})$ . Ausgehend von diesen Ergebnissen zum Punktspektrum und den entsprechenden Eigenfunktionen erfolgt die modale bzw. approximative Steuerbarkeitsanalyse anhand der modalen bzw. spektralen Darstellung (3.122), womit sich mit (3.121) das System von Dgln.

$$\frac{dx_{k,l}(t)}{dt} = \lambda_{k,l} x_{k,l}(t) + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \left( \frac{l\pi}{L_2} \right)}_{=\alpha_l} \int_0^{L_1} \sin\left(k\pi \frac{z_1}{L_1}\right) v(z_1, t) dz_1 \quad t > 0, k, l \in \mathbb{N}. \quad (3.124)$$

ergibt.

- **Sei  $v(z_1, t)$  örtlich kontinuierlicher Eingriff:** Mit  $v_k(t) := \int_0^{L_1} \sin(k\pi \frac{z_1}{L_1}) v(z_1, t) dz_1$  kann (3.124) bzgl. des Indexes  $k$  in Teilsysteme  $\Sigma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  geordnet werden

$$\Sigma_1 : \frac{dx_{1,l}(t)}{dt} = \lambda_{1,l} x_{1,l} + \alpha_l v_1(t), \quad l \in \mathbb{N}$$

$$\Sigma_2 : \frac{dx_{2,l}(t)}{dt} = \lambda_{2,l} x_{2,l} + \alpha_l v_2(t), \quad l \in \mathbb{N}$$

⋮

$$\Sigma_k : \frac{dx_{k,l}(t)}{dt} = \lambda_{k,l} x_{k,l} + \alpha_l v_k(t), \quad l \in \mathbb{N}$$

⋮

Insbesondere wird jedes Teilsystem  $\Sigma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  durch einen separaten modalen Anteil  $v_k(t)$  des Eingriffs  $v(z_1, t)$  angesteuert. Des Weiteren sind die Eigenwerte  $\lambda_{k,l}$  in jedem Teilsystem  $\Sigma_k$  disjunkt (im Allgemeinen jedoch nicht über alle Teilsysteme hinweg). Da  $\alpha_l \neq 0$  für alle  $l \in \mathbb{N}$  ist jedes Teilsystem  $\Sigma_k$  modal bzw. approximativ steuerbar, woraus die approximative Steuerbarkeit des Gesamtsystems folgt.

- Sei  $v(z_1, t) = b(z_1)v(t)$  örtlich diskreter Eingriff: Mit  $\beta_k := \int_0^{L_1} \sin(k\pi \frac{z_1}{L_1}) b(z_1) dz_1$  folgt aus (3.124), dass

$$\frac{dx_{k,l}(t)}{dt} = \lambda_{k,l} x_{k,l}(t) + \alpha_l \beta_k v(t), \quad k, l \in \mathbb{N}. \quad (3.125)$$

Entsprechend der obigen Analyse des Punktspektrums müssen zum Nachweis der Steuerbarkeit die beiden Fälle  $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$  bzw.  $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$  getrennt untersucht werden.

- Sei  $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$ : Somit existieren  $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq m$ ,  $l \neq n$  mit  $\lambda_{k,l} = \lambda_{m,n}$ . Hieraus folgt aus (3.125), dass

$$\begin{aligned} \frac{dx_{k,l}(t)}{dt} &= \lambda_{k,l} x_{k,l}(t) + \alpha_l \beta_k v(t) \\ \frac{dx_{m,n}(t)}{dt} &= \lambda_{k,l} x_{m,n}(t) + \alpha_n \beta_m v(t), \end{aligned}$$

womit ein nicht-steuerbares Teilsystem identifiziert ist. Das System ist für  $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$  also nicht modal bzw. approximativ steuerbar.

- Sei  $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$ : In diesem Fall ist das Punktspektrum disjunkt. Wegen  $\alpha_l = \alpha_n \Leftrightarrow l = k$  ist das System genau dann modal bzw. approximativ steuerbar, falls  $\beta_k \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Zusammenfassend ergibt sich aus diesem Beispiel:

- Örtlich mehr-dimensionale Probleme können mehrfache Eigenwerte aufweisen, die zum Verlust der Steuerbarkeit führen können.
- Eine genaue Analyse der Steuerbarkeitsaufgabe führt für die betrachtete beheizte Platte zum Ergebnis, dass nicht jedes Endprofil  $x(z_1, z_2, T)$  erreichbar ist (zugehörige Bedingungen sind jedoch nur hinreichend und nicht notwendig).

Aufgrund der Dualität zwischen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit treten ähnlich geartete Probleme ebenfalls beim Beobachtbarkeitsnachweis auf.

### 3.3 Einführung in die Stabilitätstheorie von SVPn

Die Untersuchung der **Stabilität** eines dynamischen Systems stellt eine der wichtigsten Fragestellungen der Systemtheorie dar. Aus Sicht der Regelungstechnik umfasst dies ebenfalls die Frage der **Stabilisierbarkeit**, also der gezielten Beeinflussung der Stabilitätseigenschaften eines gegebenen Systems. Im Folgenden wird eine Einführung in die grundlegenden Konzepte anhand der abstrakten Darstellung eines autonomen Systems

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}(A) \quad (3.126)$$

mit Operator  $A \in \mathcal{D}(A) \subset X$  in einem Hilbertraum  $X$  gegeben. Hierbei sei  $A$  infinitesimaler Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$ , so dass  $\mathbf{x}(t) = T(t)\mathbf{x}_0$ .

Zur Motivation und Illustration der Stabilitätstheorie verteilt-parametrischer Systeme sei jedoch zunächst ein endlich-dimensionales lineares System

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= A\mathbf{x}(t), & t > 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  betrachtet. Die Lösung ergibt sich hierbei zu  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ . Bekannterweise sind in diesem Fall die folgenden Stabilitätsaussagen äquivalent:

- (i)  $\mathbf{x}(t)$  ist asymptotisch stabil
- (ii)  $\mathbf{x}(t)$  ist exponentiell stabil
- (iii) alle Eigenwerte von  $A$  liegen in der linken komplexen Halbebene
- (iv) für alle  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$  und  $t_0 \geq 0$  gilt  $\int_{t_0}^{\infty} \|\mathbf{x}(t)\|^p dt < \infty$
- (v) die Transitionsmatrix  $T(t) = e^{At}$  ist exponentiell stabil, d.h.  $\exists M, \omega > 0$  so, dass  $\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}$  wobei  $\|T(t)\|$  die Operatornorm von  $T(t)$  darstellt.

Es ist hierbei insbesondere zu betonen, dass **für SVPn die Aussagen (i)–(v) im Allgemeinen nicht äquivalent sind**. Dies wird in den weiteren Abschnitten noch genauer dargestellt werden.

Ausgehend von den funktionalanalytischen Grundlagen ist im unendlich-dimensionalen Fall jedoch leicht einsichtig, dass die Charakterisierung der Stabilität eines verteilt-parametrischen Systems direkt über die Lösung, d.h. anhand der vom Systemoperator  $A$  aus (3.126) generierten  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$ , möglich ist. Da jedoch  $T(t)$  oftmals nicht ermittelt werden kann, ist man bestrebt, die Stabilität des Systems direkt anhand des infinitesimalen Generators  $A$  zu analysieren.

#### 3.3.1 Stabilität von $C_0$ -Halbgruppen

Anhand der Struktur einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  können verschiedene in der Literatur betrachtete Stabilitätsbegriffe verdeutlicht werden (siehe z.B. Luo u. a., 1999, Kapitel 3), wobei insbesondere die der asymptotischen und der exponentiellen Stabilität nachfolgend von Interesse sein werden.

##### Definition 3.19

Die  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  heißt

- „schwach stabil“ (**weakly stable**), falls  $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \langle \mathbf{x}_1, T(t)\mathbf{x}_2 \rangle_X \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$
- „stark stabil“ (**strongly stable**), falls  $\forall \mathbf{x} \in X, T(t)\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  für  $t \rightarrow \infty$
- **asymptotisch stabil**, falls für alle  $\mathbf{x} \in X, \|T(t)\mathbf{x}\|_X \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$
- **exponentiell stabil**, falls  $M, \alpha > 0$  existieren, so dass

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \quad \text{für } t \geq 0. \quad (3.127)$$

Die Konstante  $\alpha$  wird als Abklingrate und das Supremum über alle möglichen  $\alpha$  wird als Stabilitätsreserve bezeichnet.

Es sei hierbei beachtet, dass  $\|T(t)\|$  die **Operator-Norm** bezeichnet (siehe Appendix B.1.5). Offensichtlich hängt der Stabilitätsbegriff für unendlich-dimensionale Systeme von der Norm  $\|\cdot\|_X$  im gewählten Zustandsraum  $X$  ab. Dies bedeutet, dass abweichend zu den Ergebnissen für SKPN im verteilt-parametrischen Fall gilt, dass **die Stabilität bzgl. einer Norm nicht die Stabilität bzgl. einer anderen Norm impliziert**<sup>8</sup>.

Die beim Stabilitätsnachweis für unendlich-dimensionale Systeme auftretenden Schwierigkeiten werden im Folgenden anhand zweier Beispiele illustriert.

**Beispiel 3.17 (Linearer Operator in  $l^2$  (Luo u. a., 1999)).** Sei  $X = l^2$  der Hilbertraum der quadratisch summierbaren Folgen und sei

$$T(t)x = (e^{-t}x_1, e^{-t/2}x_2, \dots, e^{-t/n}x_n, \dots), \quad t \geq 0$$

für alle  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in X$ . Der Operator  $T(t) : X \rightarrow X$  erfüllt offensichtlich die Bedingungen von Definition 3.1 und stellt somit eine  $C_0$ -Halbgruppe auf  $X$  dar. Für alle  $x \in X$  gilt

$$\|T(t)x\|_X^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2t/n}x_n^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Gemäß Satz 3.19 ist  $T(t)$  somit asymptotisch stabil. Andererseits gilt für jedes  $t \in [0, \infty)$ , dass

$$\|T(t)\| = \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|T(t)x\|_X = \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2t/n}x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-t/n} = 1.$$

Die vorletzte Gleichung folgt dabei unmittelbar aus dem minimalen Abklingverhalten der Ausdrucks  $\exp(-2t/n)$  für  $t \geq 0$ , das sich für  $n \rightarrow \infty$  einstellt und da für jedes  $x \in X$  mit  $\|x\|_X = 1$  gilt, dass  $|x_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Die Halbgruppe  $T(t)$  ist folglich nicht exponentiell stabil, womit gezeigt ist, dass für unendlich-dimensionale Systeme asymptotische Stabilität nicht exponentielle Stabilität impliziert.

**Beispiel 3.18 (Shift-Halbgruppe (Curtain und Zwart, 1995; Luo u. a., 1999)).** In Abschnitt B.4.2 wurde die so genannte Shift-Halbgruppe als Beispiel eines Nicht-Rieszschen Operators eingeführt. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass

$$T(t)x(z) = x(t+z), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.128}$$

in  $X = X_1 \cap L^p([0, \infty))$  mit  $X_1 = \{x(z) \in L^1([0, \infty)) \mid |x|_1 = \int_0^{\infty} e^z|x(z)|dz < \infty\}$  eine kontrahierende  $C_0$ -Halbgruppe mit  $\|T(t)\| = 1$  darstellt, wobei das Spektrum  $\sigma(A)$  des infinitesimalen Generators von  $T(t)$ , d.h.

$$Ax = \frac{dx}{dz}, \quad D(A) = \left\{ x \in L^p(0, \infty) : x \text{ abs. stetig, } \frac{dx}{dz} \in L^p(0, \infty) \right\}, \tag{3.129}$$

vollständig in der linken komplexen Halbebene liegt. Mit der Norm

$$\|x\|_X = \|x\|_{L^p([0, \infty))} + |x|_1$$

wird  $X$  zum Banach-Raum.

- $T(t) : X \rightarrow X$  **ist kontrahierend:** Es gilt, dass

$$\begin{aligned} \|T(t)x\|_X &= \left( \int_0^{\infty} |x(t+z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} + \int_0^{\infty} e^z|x(t+z)|dz \\ &\stackrel{\eta = t+z}{=} \left( \int_t^{\infty} |x(\eta)|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} + e^{-t} \int_t^{\infty} e^\eta|x(\eta)|d\eta \\ &\leq \|x\|_{L^p([0, \infty))} + |x|_1 = \|x\|_X, \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Dies stellt eine direkte Analogie zu den Ergebnissen in Kapitel 3.1 dar. Dort wurde gezeigt, dass für SVPn die Wahl eines geeigneten Zustandsraumes (mit entsprechender Norm) bzw. geeigneter Zustände direkt mit der Wohl-Definiertheit eines Problems im Sinne von Hadamard verknüpft ist.

woraus direkt

$$\|T(t)\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|T(t)x\|_X}{\|x\|_X} \leq 1$$

folgt. Nach Definition 3.2 ist  $T(t)$  somit eine  $C_0$ -Halbgruppe von Kontraktionen.

- $\|T(t)\| = 1$ : Betrachte die Funktion  $x_\epsilon \in X$  mit

$$x_\epsilon(z) = \begin{cases} 1, & z \in [t, t + \epsilon^p], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und  $\epsilon > 0$ . Es gilt  $\|x_\epsilon\|_X = \epsilon + e^t(e^{\epsilon^p} - 1)$ , womit wegen  $\|T(t)x_\epsilon\|_X = \epsilon + e^{\epsilon^p} - 1$  folgt, dass

$$\|T(t)x_\epsilon\|_X = \frac{\epsilon + e^{\epsilon^p} - 1}{\epsilon + e^t(e^{\epsilon^p} - 1)} \|x_\epsilon\|_X.$$

Für  $\epsilon \downarrow 0$  führt die Anwendung der l'Hospitalschen Regel auf  $\|T(t)x_\epsilon\|_X / \|x_\epsilon\|_X = 1$  womit sich ergibt, dass  $\sup_{x \in X, x \neq 0} \|T(t)x\|_X / \|x\|_X \geq 1$ . Folglich gilt  $\|T(t)\| = 1$ .

- **Spektrum  $\sigma(A)$  des infinitesimalen Generators:** Wie in Definition 3.7 gezeigt, kann das Spektrum  $\sigma(A)$  des Generators  $A$  direkt aus der Resolventenmenge  $\rho(A)$  gemäß  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  bestimmt werden. Mit (3.128) und (3.129) ergibt sich die Resolvente für alle  $\lambda \in \rho(A)$  zu<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)x &= (\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} x(t+z) dt \\ &\stackrel{\eta = t+z}{=} \int_z^\infty e^{-\lambda(\eta-z)} x(\eta) d\eta =: g(z). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $x = \lambda g - Ag$ . Im Weiteren soll die Frage beantwortet werden, für welche  $\lambda \in \mathbb{C}$  auch  $g(z) \in X$  folgt. Hierzu werden zwei Teilbereiche, d.h.  $\Re\{\lambda\} \geq 0$  und  $\Re\{\lambda\} \in (-1, 0)$  untersucht.

- Sei  $\Re\{\lambda\} \geq 0$ . Dann gilt unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |e^{\lambda z}| \int_z^\infty |e^{-\lambda \eta} x(\eta)| d\eta \leq e^{\Re\{\lambda\}z} \int_z^\infty \underbrace{e^{-\Re\{\lambda\}\eta}}_{= e^{-(\Re\{\lambda\}+1)\eta}} |x(\eta)| d\eta \quad (*) \\ &\leq e^{-z} \int_z^\infty e^\eta |x(\eta)| d\eta \leq e^{-z} |x|_1. \end{aligned}$$

Hieraus kann leicht gezeigt werden, dass  $\|g\|_{L^p([0, \infty))} < \infty$ . Der Nachweis, dass auch  $|g|_1 < \infty$  folgt nach einigen Umformungen aus

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^z |g(z)| dz &\stackrel{(*)}{\leq} \int_0^\infty \int_z^\infty e^{(\Re\{\lambda\}+1)(z-\eta)} e^\eta |x(\eta)| d\eta dz \quad (**) \\ &= \int_0^\infty e^\eta |x(\eta)| \left( \int_0^\eta e^{(\Re\{\lambda\}+1)(z-\eta)} dz \right) d\eta \quad (***) \\ &\leq \frac{1}{\Re\{\lambda\} + 1} |x|_1. \end{aligned}$$

Hierbei ergibt sich (\*\*\*) aus (\*\*) durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

- Sei nun  $\Re\{\lambda\} \in (-1, 0)$ . Dann folgt in analoger Weise, dass

$$|g| \leq e^{\Re\{\lambda\}z} |x|_1,$$

womit entsprechend den obigen Ausführungen leicht  $\|g\|_{L^p([0, \infty))} < \infty$  sowie  $|g|_1 \leq |x|_1 / (\Re\{\lambda\} + 1)$  gezeigt werden kann.

Da  $g(z)$  die Resolvente angewandt auf  $x \in X$  beschreibt, ergibt sich für Resolventenmenge, dass

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\{\lambda\} > -1\} \subset \rho(A).$$

Für das Spektrum von  $A$  folgt somit direkt  $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\{\lambda\} \leq -1\}$ . Zusammenfassend wurde somit gezeigt, dass das Spektrum des Generators  $A$  vollständig in der linken komplexen Halbebene liegt während  $\|T(t)\| = 1$ . Offensichtlich kann für unendlich-dimensionale Systeme im Allgemeinen aus dem Spektrum des Systemoperators nicht auf die exponentielle Stabilität des Systems geschlossen werden.

### 3.3.2 Exponentielle Stabilität und die „spectrum determined growth assumption“

Wie im vorangegangenen Abschnitt beispielhaft gezeigt wurde, kann für  $C_0$ -Halbgruppen  $T(t)$  in Hilberträumen mit  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$  und Generator  $A$  aus dem Spektrum  $\sigma(A)$  im Allgemeinen nicht auf die Wachstumsgrenze  $\omega$  und somit auf exponentielle Stabilität der Halbgruppe geschlossen werden. Es sei hierbei bemerkt, dass sich für jede  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  die so genannte **Wachstumsgrenze der Halbgruppe** gemäß

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\log \|T(t)\|}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|T(t)\|}{t} \Rightarrow \omega_0 \in [-\infty, \infty)$$

ermitteln lässt. Insbesondere existiert für jedes  $\omega > \omega_0$  eine Konstante  $M_\omega = M(\omega)$ , so dass  $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$  erfüllt ist. Dies ist eine Konsequenz des Hille-Yoshida Theorems. Des Weiteren kann gezeigt werden, dass die Ungleichung

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} \Re\{\lambda\} \leq \omega_0 \tag{3.130}$$

allgemein gültig ist, wobei für endlich-dimensionale lineare Systeme direkt Gleichheit folgt. Wie in obigem Beispiel dargestellt wurde, gilt Gleichheit im Allgemeinen nicht für unendlich-dimensionale Systeme. Die so genannte **„spectrum determined growth assumption“** bzw. **„spectrum determined growth condition“** ist erfüllt, wenn Gleichheit in (3.130) herrscht, d.h.

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} \Re\{\lambda\} = \omega_0. \tag{3.131}$$

Am Beispiel der Shift-Halbgruppe wurde u.a. das Spektrum  $\sigma(A)$  des Operators  $A$  nicht direkt ermittelt, sondern durch die Bestimmung der Resolventenmenge  $\rho(A)$  zusammen mit der Eigenschaft, dass  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ . Dies unterstreicht die Bedeutung der Resolvente  $R(\lambda, A)$ , deren Wichtigkeit insbesondere im Hille-Yoshida Theorem zur Charakterisierung kontrahierender  $C_0$ -Halbgruppen zum Ausdruck kommt. Da die Resolvente, wie gezeigt wurde, der Laplace-Transformierten der Halbgruppe  $T(t)$  entspricht, folgt mit den bekannten Existenzkriterien der Laplace-Transformation direkt, dass für  $T(t)$  mit  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$  und  $\omega < 0$ , die gesamte rechte komplexe Halbebene  $\overline{\mathbb{C}}_0^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\{\lambda\} \geq 0\}$  in der Resolventenmenge enthalten ist. Dies führt zu folgendem Satz.

#### Satz 3.11

Sei  $A$  der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  im Hilbertraum  $X$ .  $T(t)$  ist genau dann exponentiell stabil, falls  $R(s, A) \in H_\infty(\mathcal{L}(X))$  erfüllt ist mit

$$H_\infty(\mathcal{L}(X)) := \left\{ G : \mathbb{C}_0^+ \rightarrow \mathcal{L}(X) \mid G \text{ holomorph und } \sup_{\Re\{s\}>0} \|G(s)\| < \infty \right\}.$$

Hierin bezeichnet  $\mathcal{L}(X)$  die Menge aller beschränkten linearen Operatoren von  $X$  nach  $X$ . Der Nachweis dieser notwendigen und hinreichenden Bedingung ist in Curtain und Zwart, 1995, S. 222f zu finden, wobei die folgende Zeitbereichsbedingung für exponentielle Stabilität angewendet wird (Curtain und Zwart, 1995).

#### Lemma 3.6

Sei  $A$  der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  im Hilbertraum  $X$ .  $T(t)$  ist genau dann exponentiell stabil, wenn für jedes  $x \in X$  eine positive Konstante  $\gamma_x < \infty$  existiert, so dass

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt \leq \gamma_x. \tag{3.132}$$

Es stellt sich somit die Frage, für welche infinitesimalen Generatoren  $A$  bzw. Halbgruppen  $T(t)$  direkt auf (3.131) geschlossen werden kann. Curtain und Zwart, 1995 liefern hierzu die folgende Charakterisierung.

<sup>9</sup>Wie gezeigt entspricht  $R(\lambda, A)$  der Laplace-Transformierten der  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$ , d.h.  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty T(t)e^{-\lambda t} dt$  mit  $\Re\{\lambda\} > \omega$  da  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ .

**Satz 3.12**

Sei  $A$  der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  in einem Hilbertraum  $X$  und sei

$$\omega_\sigma := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \Re\{\lambda\}. \quad (3.133)$$

$T(t)$  erfüllt genau dann die „spectrum determined growth assumption“, wenn für alle  $\omega > \omega_\sigma$  gilt, dass  $((s + \omega)I - A)^{-1} \in H_\infty(\mathcal{L}(X))$ .

*Beweis.* Der Beweis dieses Satzes ist leicht ausführbar.

- Richtung „ $\Rightarrow$ “: Es wird angenommen, dass  $T(t)$  die „spectrum determined growth assumption“ erfüllt, d.h.  $\omega_0 = \omega_\sigma$ . Wegen  $\|T(t)\| \leq M_0 e^{\omega_0 t}$  ist  $\tilde{T}(t) = e^{-\omega t} T(t)$  für alle  $\omega > \omega_\sigma$  exponentiell stabil. Der Generator  $\tilde{A}$  von  $\tilde{T}(t)$  ergibt sich gemäß (3.49) zu  $\tilde{A} = -\omega I + A$ . Mit Satz 3.11 folgt somit unmittelbar, dass  $(sI - \tilde{A})^{-1} = ((s + \omega)I - A)^{-1} \in H_\infty(\mathcal{L}(X))$ .
- Richtung „ $\Leftarrow$ “: Sei  $\omega \geq \omega_\sigma$ . Somit folgt aus Satz 3.11, dass  $((s + \omega)I - A)^{-1} = (sI - (-\omega I + A))^{-1} \in H_\infty(\mathcal{L}(X))$  weshalb  $-\omega I + A$  infinitesimaler Generator einer exponentiell stabilen  $C_0$ -Halbgruppe  $\tilde{T}(t) = e^{-\omega t} T(t)$  ist. Die Wachstumsgrenze  $\omega_0$  von  $T(t)$  ist sicher kleiner als  $\omega$ , was für alle  $\omega \geq \omega_\sigma$  gilt. Folglich ist  $\omega_0 \leq \omega_\sigma$ . Da nach (3.130) jedoch allgemein  $\omega_\sigma \leq \omega_0$  gilt, ergibt sich  $\omega_0 = \omega_\sigma$ , weshalb  $T(t)$  die „spectrum determined growth assumption“ erfüllt.  $\square$

Insbesondere kann unmittelbar gezeigt werden, dass alle **Rieszschen Systeme** die Bedingungen von Satz 3.12 erfüllen. Für Rieszsche Operatoren  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, \psi_n \rangle_X \phi_n$  kann die Resolvente entsprechend (3.83) direkt angegeben werden

$$R(s, A) = (sI - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \lambda_n} \langle \cdot, \psi_n \rangle_X \phi_n, \quad \forall s \in \rho(A).$$

Des Weiteren weist  $A$  ein reines Punktspektrum auf, d.h.  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ , woraus  $\omega_\sigma = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Re\{\lambda_n\}$  folgt. Für alle  $\omega > \omega_\sigma$  ist somit einsichtig, dass  $R(s + \omega, A)$  in der gesamten Halbebene  $\mathbb{C}_0^+$  beschränkt und holomorph ist. Diese Ergebnisse können weiter verallgemeinert werden. In Luo u. a., 1999 wird gezeigt, dass alle **kompakten  $C_0$ -Halbgruppen bzw. alle  $C_0$ -Halbgruppen mit reinem Punktspektrum** die „spectrum determined growth assumption“ erfüllen. Hieraus können Möglichkeiten zum Nachweis exponentieller Stabilität abgeleitet werden, wobei die Resolvente des Generators  $A$  analysiert werden muss.

**Satz 3.13**

Sei  $T(t)$  eine  $C_0$ -Halbgruppe in einem Hilbertraum  $X$  mit infinitesimalem Generator  $A$ .  $T(t)$  ist genau dann exponentiell stabil, wenn  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\{\lambda\} \geq 0\} \subset \rho(A)$  und

$$\|R(\lambda, A)\| \leq M$$

für alle  $\lambda$  mit  $\Re\{\lambda\} \geq 0$  und Konstante  $M > 0$ .

Dies führt auf den so genannten **Frequenzbereichs-Test** zum Nachweis der exponentiellen Stabilität von  $C_0$ -Halbgruppen in Hilberträumen (Luo u. a., 1999, S. 139/140).

**Korollar 3.2.** Sei  $T(t)$  eine gleichmäßig beschränkte  $C_0$ -Halbgruppe in einem Hilbertraum  $X$  mit infinitesimalen Generator  $A$ .  $T(t)$  ist genau dann exponentiell stabil, wenn  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$  und

$$M_0 := \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|R(i\tau, A)\| < \infty.$$

Dieser Ansatz bietet eine effiziente Methode zum Stabilitätsnachweis und wird im Weiteren auf die Klasse der **Rieszschen Operatoren** angewandt. Vorab wird jedoch zunächst beispielhaft die Bestimmung der Resolvente anhand des Modells eines linearen Wärmeleitungssystems illustriert.

**Beispiel 3.19 (Bestimmung der Resolvente für ein lineares Wärmeleitungssystem).** Die Temperaturverteilung  $x(z, t)$  in einem Stab gehorcht bekannterweise den Gleichungen

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), t > 0$$

$$\begin{aligned} x(0, t) = x(1, t) = 0, & & t > 0 \\ x(z, 0) = x_0(z), & & z \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Die Resolvente, d.h. die Laplace-Transformierte der entsprechenden  $C_0$ -Halbgruppe, kann hierbei auf zwei Arten ermittelt werden:

- **Anwendung Laplace-Transformation und Methode der Greenschen Funktion:** Sei  $X(z, s)$  die Laplace-Transformierte von  $x(z, t)$ , so ergibt sich aus der PDgl., den Rand- und Anfangsbedingungen die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(z, s)}{dz^2} - sX(z, s) &= -x_0(z) & z \in (0, 1) \\ X(0, s) = X(1, s) &= 0. \end{aligned}$$

Im Weiteren bezeichnet  $g(z, \zeta, s)$  die Greensche Funktion, die eine Inversion des Differenzialoperators ermöglicht

$$\begin{aligned} - \int_0^1 G(z, \zeta, s) x_0(\zeta) d\zeta &= \int_0^1 G(z, \zeta, s) \left( \frac{d^2 X(\zeta, s)}{d\zeta^2} - sX(\zeta, s) \right) d\zeta \\ &= \underbrace{\left[ G(z, \zeta, s) \frac{dX(\zeta, s)}{d\zeta} - \frac{\partial G(z, \zeta, s)}{\partial \zeta} X(\zeta, s) \right]_{\zeta=0}^{\zeta=1}}_{\substack{= G(z, 1, s) \frac{dX}{d\zeta}(1, s) - G(z, 0, s) \frac{dX}{d\zeta}(0, s) \\ \stackrel{\perp}{=} 0}} + \int_0^1 \underbrace{\left( \frac{\partial^2 G(z, \zeta, s)}{\partial \zeta^2} - sG(z, \zeta, s) \right)}_{\stackrel{\perp}{=} \delta(\zeta - z)} X(\zeta, s) d\zeta, \end{aligned}$$

bzw.

$$X(z, s) = - \int_0^1 G(z, \zeta, s) x_0(\zeta) d\zeta = R(s, A) x_0.$$

Offensichtlich kann die Resolvente direkt als Integraloperator in Form der Greenschen Funktion dargestellt werden. Die entsprechenden Bestimmungsgleichungen der Greenschen Funktion und somit der Resolvente ergeben sich hierbei zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(z, \zeta, s)}{\partial \zeta^2} - sG(z, \zeta, s) &= \delta(\zeta - z), & \zeta \in (0, 1) \\ G(z, 0, s) = G(z, 1, s) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Randwertaufgabe in  $G(z, \zeta, s)$  kann beispielsweise mittels eines bereichsweisen Ansatzes und der Formulierung von Sprung- und Stetigkeitsbedingungen erfolgen (Gilles, 1973; Butkovskiy, 1982). Dies liefert

$$G(z, \zeta, s) = \begin{cases} - \frac{\sinh(\sqrt{s}\zeta) \sinh(\sqrt{s}(1-z))}{\sinh(\sqrt{s})}, & 0 \leq \zeta \leq z \\ - \frac{\sinh(\sqrt{s}z) \sinh(\sqrt{s}(1-\zeta))}{\sinh(\sqrt{s})}, & z \leq \zeta \leq 1 \end{cases}$$

womit die Resolvente vollständig bestimmt ist.

- **Spektrale Systemdarstellung:** Durch die Lösung der in diesem Fall selbst-adjungierten Eigenwertaufgabe zum Differenzialoperator kann die spektrale Darstellung der PDgl. mit Rand- und Anfangsbedingungen ermittelt werden. Entsprechend den obigen Ausführungen zu Rieszchen Operatoren ergeben sich unendlich viele gewöhnliche Differenzialgleichungen in den spektralen Zuständen  $x_n(t) = \langle x(z, t), \psi_n(z) \rangle_X$ ,  $X = L^2(0, 1)$ , gemäß

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \lambda_n x_n(t), \quad t > 0, n \in \mathbb{N}$$

mit

$$x_n(0) = x_n^0 = \langle x_0(z), \psi_n(z) \rangle_X.$$

adjungierten Eigenfunktionen  $\psi_n(z)$  und Eigenwerten  $\lambda_n = -(n\pi)^2$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Anwendung der Laplace-Transformation führt auf

$$X_n(s) = \frac{1}{s - \lambda_n} x_n^0, \quad n \in \mathbb{N},$$

woraus sich durch Fourier-Synthese, vgl. (B.6), die spektrale Darstellung von  $X(z, s)$  bzw. der Resolvente  $R(s, A)$  zu

$$X(z, s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{s - \lambda_n} \langle x_0(z), \psi_n(z) \rangle_X \psi_n(z) = R(s, A)x_0$$

ergibt. Die Lösung im Zeitbereich kann somit leicht durch Rücktransformation ermittelt werden

$$x(z, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n(t) \psi_n(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\lambda_n t} \langle x_0(z), \psi_n(z) \rangle_X \psi_n(z),$$

woraus sich die exponentielle Stabilität des Systems direkt ableiten lässt.

Im Folgenden wird skizziert, wie anhand der Resolvente eines Rieszschen Systems auf die exponentielle Stabilität der entsprechenden  $C_0$ -Halbgruppe geschlossen werden kann.



Zusammenfassend ergibt sich für Rieszsche Systeme das folgende Stabilitätsresultat (Curtain und Zwart, 1995).

**Korollar 3.3.** Sei  $A$  Rieszscher Spektraloperator mit einfachen Eigenwerten  $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ , entsprechenden Eigenfunktionen  $\{\phi_n, n \geq 1\}$  und adjungierten Eigenfunktionen  $\{\psi_n, n \geq 1\}$ , dann gilt (3.131) und exponentielle Stabilität folgt direkt aus dem Spektrum von  $A$ .

### 3.3.3 Stabilität nach Lyapunov

Neben Spektrumsbedingungen werden für endlich-dimensionale Systeme zum Nachweis der Stabilität einer Ruhelage häufig Lyapunov-Gleichungen oder die direkte Methode nach Lyapunov herangezogen. Im Folgenden soll analysiert werden, inwieweit diese Konzepte auf den Fall unendlich-dimensionaler Funktionenräume übertragen werden können.

#### 3.3.3.1 Die Operator-Lyapunov-Gleichung

Ausgehend von Lemma 3.6 zur exponentiellen Stabilität einer  $C_0$ -Halbgruppe kann direkt das folgende Lyapunov-ähnliche Resultat bewiesen werden.

##### Satz 3.14

Sei  $A$  der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  im Hilbertraum  $X$ .  $T(t)$  ist genau dann exponentiell stabil, wenn ein positiver Operator  $P \in \mathcal{L}(X)$  so existiert, dass

$$\langle Ax, Px \rangle_X + \langle Px, Ax \rangle_X = -\|x\|_X^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \quad (3.134)$$

Gleichung (3.134) wird auch als **Lyapunov-Gleichung** bezeichnet.

Hierbei wird ein selbstadjungierter Operator als **positiv** bezeichnet, wenn

$$\forall \mathbf{x} \in X : \quad \langle \mathbf{x}, P\mathbf{x} \rangle_X \geq 0,$$

wobei die Identität nur für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  gelten soll. Der Beweis der Notwendigkeit in Satz 3.14 ist eher technischer Natur und erfolgt über die hier nicht weiter verfolgte Untersuchung von Gramschen Abbildungen. Der Nachweis, dass aus (3.134) exponentielle Stabilität von  $T(t)$  folgt, ist jedoch leicht einsichtig und zeigt eine gewisse Analogie zu bekannten Resultaten für endlich-dimensionale Systeme.

*Beweis.* Der Beweis der hinreichenden Aussage ist leicht ausführbar.

- Richtung "←": Sei  $P$  ein beschränkter positiver Operator und man betrachte

$$V(t, \mathbf{x}) = \langle PT(t)\mathbf{x}, T(t)\mathbf{x} \rangle_X.$$

Da  $P$  positiv und beschränkt ist gilt  $V(t, \mathbf{x}) \geq 0 \forall t \geq 0$ . Für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$  liefert die Differenziation von  $V(t, \mathbf{x})$  entlang einer Lösung von  $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = A\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$ , dass

$$\frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} = \langle PAT(t)\mathbf{x}, T(t)\mathbf{x} \rangle_X + \langle PT(t)\mathbf{x}, AT(t)\mathbf{x} \rangle_X \stackrel{(3.134)}{=} -\|T(t)\mathbf{x}\|_X^2.$$

Integration bzgl.  $t$  ergibt

$$0 \leq V(t, \mathbf{x}) = V(0, \mathbf{x}) - \int_0^t \|T(\tau)\mathbf{x}\|_X^2 d\tau.$$

Da nun offensichtlich

$$\int_0^t \|T(\tau)\mathbf{x}\|_X^2 d\tau \leq V(0, \mathbf{x}) = \langle P\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X \quad \forall t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$$

gilt und  $\mathcal{D}(A)$  dicht in  $X$  liegt (vgl. Korollar 3.1), existiert ein  $\gamma_{\mathbf{x}} = \langle P\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X$  so, dass

$$\int_0^t \|T(\tau)\mathbf{x}\|_X^2 d\tau \leq \gamma_{\mathbf{x}}$$

womit nach Lemma 3.6 die exponentielle Stabilität von  $T(t)$  folgt.

- Richtung "⇒": Siehe Curtain und Zwart, 1995, S. 217 □

Trotz der aus Satz 3.14 resultierenden direkten Möglichkeit zum Nachweis exponentieller Stabilität ist die Anwendbarkeit der Operator-Lyapunov-Gleichung (3.134) eher eingeschränkt. Insbesondere existieren im Gegensatz zu linearen endlich-dimensionalen Systemen keine allgemeinen analytischen oder numerischen Methoden zur Ermittlung des positiven Operators  $P$ . Gewisse Anwendungen dieses Ansatzes sind beispielsweise in Pritchard und Zabczyk, 1981 zu finden.

### 3.3.3.2 Die direkte Methode von Lyapunov

Neben der Einführung von Operator-Lyapunov-Gleichungen kann andererseits die für lineare und nichtlineare endlich-dimensionale Systeme motivierte formale Definition der Stabilität im Sinne von Lyapunov direkt auf verteilt-parametrische Systeme übertragen werden. Eine **Ruhelage**  $\mathbf{x}_R$  von (3.126) ist hierbei durch

$$A\mathbf{x}_R = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_R \in \mathcal{D}(A) \tag{3.135}$$

gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $\mathbf{x}_R \equiv \mathbf{0}$  angenommen werden<sup>10</sup>.

#### Definition 3.20: Lyapunov-Stabilität

Die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  von (3.126) wird als **stabil nach Lyapunov** bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_X$  bezeichnet, falls zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta(\epsilon) > 0$  existiert, so dass unter der Voraussetzung  $\|\mathbf{x}_0\|_X \leq \delta(\epsilon)$  für alle  $t \geq 0$  gilt  $\|\mathbf{x}(t)\|_X \leq \epsilon$ . Gilt des Weiteren  $\|\mathbf{x}(t)\|_X \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , so heißt die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  **asymptotisch stabil nach Lyapunov**.

<sup>10</sup>Dies kann durch eine Zustandstransformation  $\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_R$  mit  $\mathbf{x}_R$  aus (3.135) erreicht werden.

Zum eigentlichen Nachweis der Stabilität im Sinne von Lyapunov wird für endlich-dimensionale Systeme im Allgemeinen die direkte Methode von Lyapunov verwendet (vgl. Kugi, 2012, S. 49). Diese besagt im Wesentlichen, dass aus der Existenz einer positiv definiten Funktion  $V(\mathbf{x})$  mit negativ semidefiniter bzw. definiter Ableitung  $\dot{V}(\mathbf{x})$  auf die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität der Ruhelage geschlossen werden kann. Der Beweis dieser Aussage beruht jedoch auf der für endlich-dimensionale Vektorräume zumindest lokal immer vorhandenen Kompaktheit der Niveaumengen der Lyapunovfunktion  $V(\mathbf{x})$  (siehe Khalil, 2002, S. 114/115). Es sei an dieser Stelle jedoch bemerkt, dass **keine allgemein gültige Erweiterung der direkten Methode von Lyapunov auf verteilt-parametrische Systeme existiert**.

Dies ist insbesondere durch die Tatsache begründet, dass unendlich-dimensionale Funktionenräume im Allgemeinen nicht kompakt sind. Folglich kann generell nicht auf die lokale Kompaktheit der Niveaumengen der Lyapunovfunktion bzw. des Lyapunovfunktional in unendlich-dimensionalen Funktionenräumen geschlossen werden. Das folgende Beispiel illustriert diese Tatsache. Hierzu wird nochmals der Vollständigkeit halber die Definition einer kompakten Menge angegeben.

### Definition 3.21: kompakte Menge

Eine Teilmenge  $M$  eines normierten Raums  $X$  mit Norm  $\|\cdot\|$  wird als **kompakt** bzw. **relativ kompakt** bezeichnet, falls jede Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $M$  bzw.  $\bar{M}$  beinhaltet.

Für Teilmengen endlich-dimensionaler normierter Räume folgt aus der Abgeschlossenheit und Beschränktheit der Teilmenge deren Kompaktheit.

**Beispiel 3.20 (Nicht-Kompaktheit der Einheitskugel in  $L^2(0, 1)$ ).** Sei  $X = L^2(0, 1)$  der Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Funktionen mit innerem Produkt  $\langle x, y \rangle_X = \int_0^1 x(z)y(z)dz$  für alle  $x, y \in L^2(0, 1)$  und induzierter Norm  $\|x\|_X^2 = \langle x, x \rangle$ . Für den Raum  $X$  existieren verschiedene orthonormale Basen, beispielsweise

$$\mathcal{E}_B = \{1, \sqrt{2} \sin(2\pi nz), \sqrt{2} \cos(2\pi nz), \quad n \geq 1\}.$$

Wie leicht nachzurechnen ist, gilt somit für jede Folge  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  orthonormaler Elemente  $x_n \in \mathcal{E}_B$ ,  $n \geq 1$  (d.h.  $\|x_n\|_X = 1$ ,  $n \geq 1$ ), dass

$$\|x_n - x_m\|_X^2 = 2$$

für alle  $n \neq m$ . Offensichtlich existiert keine konvergente Teilfolge  $\{x_{n_i}\}_i$  mit einem Grenzwert in der Einheitskugel, da alle Elemente den Abstand  $\sqrt{2}$  aufweisen. Diese Argumentation kann leicht auf beliebige Hilberträume mit orthonormaler Basis übertragen werden.

Für einen im Weiteren betrachteten Spezialfall kann jedoch trotz der fehlenden Kompaktheit unendlich-dimensionaler normierter Räume in einer gewissen Analogie zur direkten Methode von Lyapunov für endlich-dimensionale Systeme auf exponentielle Stabilität der  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  geschlossen werden. Hierzu muss jedoch zunächst der Begriff des Lyapunovfunktional geklärt werden (Luo u. a., 1999).

### Definition 3.22: Lyapunovfunktional

Sei  $V : X \supseteq \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ , stetig in  $\overline{\mathcal{D}(V)}$ . Für  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(V)$  definiere man

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [V(T(t)\mathbf{x}) - V(\mathbf{x})]. \quad (3.136)$$

Falls  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(V)$ , wird  $V(\mathbf{x})$  Lyapunovfunktional genannt.

Folgender Satz ist somit leicht einsichtig (vgl. z.B. Rahn, 2001).

### Satz 3.15

Die  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  ist exponentiell stabil, falls ein Lyapunovfunktional  $V(\mathbf{x})$  existiert, so dass gelten

- (i)  $\alpha\|\mathbf{x}\|_X^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \beta\|\mathbf{x}\|_X^2$  mit  $\alpha, \beta > 0$ , und
- (ii)  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\gamma\|\mathbf{x}\|_X^2$ ,  $\gamma > 0$ .

Insbesondere impliziert dieser Satz, dass gilt

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma \|x\|_X^2 \leq -\frac{\gamma}{\beta} V(x) = -\mu V(x),$$

womit direkt  $V(x) \leq V(x(0))e^{-\mu t}$  folgt. Hieraus ist die Abschätzung

$$\|x\|_X \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \|x(0)\|_X e^{-\frac{\mu}{2}t}$$

leicht ableitbar. Mit der Operatornorm und  $x(t) = T(t)x(0)$  gilt

$$\|T(t)\| = \sup_{x(0) \in D(T), x(0) \neq 0} \frac{\|T(t)x(0)\|_X}{\|x(0)\|_X} \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-\frac{\mu}{2}t},$$

woraus gemäß Definition 3.19 wegen  $\alpha, \beta, \mu > 0$  die exponentielle Stabilität der  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  und somit des Systems (3.126) folgt. Die Anwendung dieses Satzes wird anhand zweier Beispiele illustriert.

**Beispiel 3.21 (Nachweis exponentieller Stabilität für ein Wärmeleitungsproblem).** Der Aufheizvorgang eines Wärmeleiters mit der Temperaturverteilung  $x(z, t)$  wird durch die PDgl.

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (3.137)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = Kx(0, t), \quad x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.138)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (3.139)$$

beschrieben. Mittels der direkten Methode nach Lyapunov soll die Stabilität der Ruhelage  $x_R(z) = 0$  untersucht werden. Wie erwähnt, kann die Ruhelage ohne Beschränkung der Allgemeinheit als identisch mit Null angenommen werden. Als Zustandsraum wird  $X = L^2(0, 1)$  gewählt mit Systemoperator  $Ax = \frac{d^2x}{dz^2}$  und  $D(A) = \{x \in L^2(0, 1) \mid \frac{d^2x}{dz^2} \in L^2(0, 1), x, \frac{dx}{dz} \text{ abs. stetig}, \frac{dx}{dz}(0) - Kx(0) = 0, x(1) = 0\}$ . Als Kandidat für ein Lyapunovfunktional wird

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(z, t) dz = \frac{1}{2} \|x\|_X^2$$

gewählt. Offensichtlich ist  $\alpha \|x\|_X^2 \leq V(x) \leq \beta \|x\|_X^2$  für alle  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$  und  $\beta \geq \frac{1}{2}$ . Des Weiteren gilt<sup>11</sup>

$$\dot{V}(x) = \int_0^1 x \frac{\partial x}{\partial t} dz = \int_0^1 x \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz = \left[ x \frac{\partial x}{\partial z} \right]_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz = -Kx^2(0) - \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|_X^2.$$

Im Hinblick auf die Anwendung von Satz 3.15 stellt sich die Frage, wie sich  $\left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|_X^2$  durch  $\|x\|_X$  abschätzen lässt. Betrachte hierzu

$$\int_0^1 1 \cdot x^2 dz = [zx^2]_0^1 - 2 \int_0^1 zx \frac{\partial x}{\partial z} dz. \quad (3.140)$$

Wegen

$$0 \leq \int_0^1 \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz \leq \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dz + 2 \int_0^1 z^2 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz + 2 \int_0^1 zx \frac{\partial x}{\partial z} dz$$

bzw.

$$-2 \int_0^1 zx \frac{\partial x}{\partial z} dz \leq \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dz + 2 \int_0^1 z^2 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz \leq \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dz + 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz$$

folgt aus (3.140) insbesondere, dass

$$\int_0^1 x^2 dz \leq 2x^2(1) + 4 \int_0^1 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz$$

bzw.

$$\|x\|_X^2 \leq 2x^2(1) + 4 \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|_X^2. \quad (3.141)$$

Diese Gleichung wird auch als **Poincaré-Ungleichung** bezeichnet. Somit ist leicht ersichtlich, dass wegen  $x(1) = 0$  gilt

$$\dot{V}(x) \leq -Kx^2(0) - \frac{1}{4}\|x\|_X^2 \leq -\frac{1}{4}\|x\|_X^2 = -\frac{1}{2}V(x)$$

für alle  $K \geq 0$ . Nach Satz 3.15 ist die Ruhelage  $x_R = 0$  exponentiell stabil in der  $L^2$ -Norm. Wenn  $y(t) = x(0, t)$  die Ausgangsgröße des Systems bezeichnet, dann wurde somit die exponentielle Stabilität der Ruhelage durch eine proportionale Ausgangsrückführung nachgewiesen. Zu beachten ist, dass exponentielle Stabilität in der  $L^2$ -Norm nicht die punktweise exponentielle Stabilität  $|x(z, t)| \leq Me^{-\mu t}$ ,  $M, \mu > 0$ , für alle  $z \in [0, 1]$  impliziert.

Wie in obigem Beispiel gezeigt wurde, erfordert die Anwendung der direkten Methode typischerweise die Anwendung geeigneter Ungleichungen. Eine Auswahl ist untenstehend zusammengefasst (siehe z.B. Franke, 1987; Krstic, 1999).

- **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:** Seien  $x(z), y(z) \in L^2(0, 1)$ , so gilt

$$\left[ \int_0^1 x(z)y(z)dz \right]^2 \leq \int_0^1 x^2(z)dz \cdot \int_0^1 y^2(z)dz. \quad (3.142)$$

- **Ungleichung von Poincaré:** Sei  $x(z) \in H^1(0, 1)$ , dann gelten

$$\int_0^1 x^2(z)dz \leq 2x^2(0) + 4 \int_0^1 \left( \frac{\partial x(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (3.143)$$

$$\int_0^1 x^2(z)dz \leq 2x^2(1) + 4 \int_0^1 \left( \frac{\partial x(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (3.144)$$

- **Ungleichung von Agmon:** Sei  $x(z) \in H^1(0, 1)$ , dann gelten

$$\max_{z \in [0,1]} |x(z)|^2 \leq x^2(0) + 2 \left( \int_0^1 x^2(z)dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial x(z)}{\partial z} \right)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.145)$$

$$\max_{z \in [0,1]} |x(z)|^2 \leq x^2(1) + 2 \left( \int_0^1 x^2(z)dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial x(z)}{\partial z} \right)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.146)$$

Offensichtlich kann die Agmon-Ungleichung zum Nachweis punktweiser Stabilität herangezogen werden, was im Folgenden anhand des Beispiels 3.21 ausgeführt werden soll.

**Beispiel 3.22 (Nachweis punktweiser exponentieller Stabilität für ein Wärmeleitungsproblem).**  
Ausgehend von den obigen Ergebnissen wird

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \|x\|_{H^1(0,1)}^2$$

als Kandidat für ein Lyapunovfunktional angesetzt. Des Weiteren sei  $K = 0$ , womit folgt, dass

$$\dot{V}(x) = \int_0^1 x \frac{\partial x}{\partial t} dz + \int_0^1 \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right) dz = - \int_0^1 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz - \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)^2 dz.$$

<sup>11</sup>In Analogie zur abstrakten Darstellung von SVPn müsste die Schreibweise  $\frac{\partial x}{\partial z} = A^{\frac{1}{2}}x$  bzw.  $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = Ax$  verwendet werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird jedoch im Weiteren darauf verzichtet.

Aus der Poincaré-Ungleichung mit  $x(z)$  ersetzt durch  $\frac{\partial x(z)}{\partial z}$  ergibt sich

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{4} \int_0^1 x^2 dz - \frac{1}{4} \int_0^1 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz = -\frac{1}{2} V(x).$$

Somit gilt nach der Definition von  $V(x)$

$$\|x\|_X^2 + \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|_X^2 \leq e^{-\frac{t}{2}} \left( \|x_0\|_X^2 + \left\| \frac{\partial x_0}{\partial z} \right\|_X^2 \right),$$

so dass die Anwendung der Agmon-Ungleichung das Ergebnis

$$\max_{z \in [0,1]} |x|^2 \leq 2 \|x\|_X \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|_X \leq \|x\|_X^2 + \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|_X^2 \leq e^{-\frac{t}{2}} \left( \|x_0\|_X^2 + \left\| \frac{\partial x_0}{\partial z} \right\|_X^2 \right)$$

liefert. Hieraus folgt offensichtlich die punktweise exponentielle Stabilität der Ruhelage  $x_R = 0$ .

Diese einfachen Beispiele zeigen erste Möglichkeiten der Anwendung von Satz 3.15. Allerdings sollte bemerkt werden, dass schon für die lineare Wärmeleitungsgleichung gewisse Modifikationen, wie beispielsweise der Randbedingungen, eine deutliche Erhöhung des mit dem Nachweis einhergehenden mathematischen Aufwands bewirken.

**Beispiel 3.23 (Nachweis exponentieller Stabilität für ein Wärmeleitungsproblem mit Rückführung einer ortsdiskreten Zustandsgröße).** Ausgehend von Beispiel 3.21 wird im Weiteren der Nachweis exponentieller Stabilität der Ruhelage  $x_R = 0$  im Fall der Rückführung des Zustandes  $x(\zeta, t)$  an einer beliebigen Stelle  $\zeta \in [0, 1)$  untersucht. Dies bedeutet, dass anstelle der RBn (3.138) die Bedingungen

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = Kx(\zeta, t), \quad x(1, t) = 0 \quad t > 0$$

untersucht werden. Als Lyapunovfunktional wird in Analogie

$$V(x) = \frac{1}{2} \|x\|_X^2$$

verwendet. Somit ergibt sich

$$\dot{V}(x) = \int_0^1 x \frac{\partial x}{\partial t} dz = -Kx(0)x(\zeta) - \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|_X^2.$$

Zur weiteren Analyse von  $\dot{V}(x)$  wird die wegen  $x(1) = 0$  gültige Eigenschaft

$$x(0)x(\zeta) = \int_0^1 \frac{\partial x}{\partial z} dz \int_{\zeta}^1 \frac{\partial x}{\partial z} dz = \left( \int_{\zeta}^1 \frac{\partial x}{\partial z} dz \right)^2 + \int_0^{\zeta} \frac{\partial x}{\partial z} dz \int_{\zeta}^1 \frac{\partial x}{\partial z} dz$$

herangezogen. Darüber hinaus müssen die Fälle  $K \geq 0$  und  $K < 0$  gesondert betrachtet werden.

- **Fall  $K \geq 0$ :** Hier kann  $\dot{V}(x)$  gemäß

$$\dot{V}(x) \leq K \int_0^{\zeta} \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right| dz \int_{\zeta}^1 \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right| dz - \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|_X^2$$

abgeschätzt werden. Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\int_0^{\zeta} \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right| dz \leq \sqrt{\zeta} \left( \int_0^{\zeta} \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{\zeta}^1 \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right| dz \leq \sqrt{1-\zeta} \left( \int_{\zeta}^1 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

führt auf

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\leq K\sqrt{\zeta(1-\zeta)}\left(\int_0^\zeta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\zeta^1\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}-\left\|\frac{\partial x}{\partial z}\right\|_X^2 \\ &\leq -(1-K\sqrt{\zeta(1-\zeta)})\left\|\frac{\partial x}{\partial z}\right\|_X^2,\end{aligned}$$

womit für  $1-K\sqrt{\zeta(1-\zeta)}>0$  bzw.  $K<1/\sqrt{\zeta(1-\zeta)}$  und mittels der Poincaré–Ungleichung folgt, dass

$$\dot{V}(x)\leq-\frac{1}{2}(1-K\sqrt{\zeta(1-\zeta)})V(x).$$

- **Fall**  $K<0$ : In diesem Fall kann durch die Abschätzung

$$\dot{V}(x)\leq-K\int_0^1\left|\frac{\partial x}{\partial z}\right| dz\int_\zeta^1\left|\frac{\partial x}{\partial z}\right| dz-\left\|\frac{\partial x}{\partial z}\right\|_X^2$$

und analoger Anwendung der Cauchy–Schwarzschen sowie Poincaré–Ungleichung gezeigt werden, dass

$$\dot{V}(x)\leq-\frac{1}{2}(1+K\sqrt{1-\zeta})V(x)$$

für  $K>-1/\sqrt{1-\zeta}$ .

Zusammenfassend kann die exponentielle Stabilität der Ruhelage  $x_R=0$  des Wärmeleitungssystems mit proportionaler Rückführung des Zustands  $x(\zeta,t)$  für beliebiges  $\zeta\in[0,1)$  in der  $L^2$ –Norm für

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}<K<\frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}$$

nachgewiesen werden.

Trotz der erfolgreichen Anwendung der direkten Methode nach Lyapunov gemäß Satz 3.15 auf einfache lineare SVPn, kann hieraus keine allgemeine Methodik abgeleitet werden. Dies ist darin begründet, dass keine Systematik zur Wahl des Lyapunovfunktional  $V(x)$  existiert. Für gewisse mechanische Systeme können jedoch durch die Wahl des Lyapunovfunktional als Gesamtenergie zum Teil weiterführende Ergebnisse abgeleitet werden. Hierbei wird oftmals auf die so genannte **Energie–Multiplikator–Methode** zurückgegriffen.

### 3.3.3.3 Die Energie–Multiplikator–Methode

Die grundlegende Idee der Energie–Multiplikator–Methode wird im Folgenden anhand der Gleichung eines einseitig eingespannten Euler–Bernoulli–Balkens dargestellt. Für weiterführende Ergebnisse sei auf die Literatur, insbesondere Komornik, 1994; Luo u. a., 1999 verwiesen.

**Beispiel 3.24 (Nachweis exponentieller Stabilität für den Euler–Bernoulli Balken).** Die Bewegungsgleichung in normierter dimensionsloser Form für einen einseitig eingespannten Balken ergibt sich unter Verwendung der Euler–Bernoulli Balkentheorie zu

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 v(z,t)}{\partial z^4}=0,\quad z\in(0,1),\quad t>0.\quad (3.147)$$

Hierbei bezeichnet  $v(z,t)$  die Balkenauslenkung. Die zugehörigen Rbn lauten am eingespannten Ende

$$v(0,t)=0,\quad\frac{\partial v}{\partial z}(0,t)=0,\quad t>0\quad (3.148)$$

sowie am freien Ende

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(1,t)=u_1(t),\quad\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}(1,t)=u_2(t),\quad t>0.\quad (3.149)$$

Hierbei wird angenommen, dass das angreifende Moment  $u_1(t)$  und die angreifende Querkraft  $u_2(t)$  Linearkom-

binationen der Form

$$u_1(t) = \mathbf{k}_1^T \begin{bmatrix} v(1, t) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(1, t) \end{bmatrix} + \mathbf{k}_2^T \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z}(1, t) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}(1, t) \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

$$u_2(t) = \mathbf{k}_3^T \begin{bmatrix} v(1, t) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(1, t) \end{bmatrix} + \mathbf{k}_4^T \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z}(1, t) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}(1, t) \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

mit  $\mathbf{k}_j = [k_{j,1}, k_{j,2}]^T$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  repräsentieren. Die ABn lauten

$$v(z, 0) = v_0(z), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(z, 0) = v_1(z). \quad (3.152)$$

Es kann gezeigt werden (vgl. z.B. Luo u. a., 1999, S. 200f), dass (3.147)–(3.152) durch Einführung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(z, t) = [x_1(z, t), x_2(z, t)]^T$  mit  $x_1(z, t) = v(z, t)$ ,  $x_2(z, t) = \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$  im Zustandsraum

$$X = \left\{ \mathbf{x} \mid x_1 \in H^2(0, 1), x_2 \in L^2(0, 1), x_1(0) = 0 = \frac{\partial x_1}{\partial z}(0) \right\}$$

mit innerem Produkt und induzierter Norm

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_X = \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2} + x_2 y_2 \right) dz, \quad \|\mathbf{x}\|_X = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_X^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$$

in eine wohl-definierte abstrakte Differenzialgleichung der Form (3.126) mit Systemoperator

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\partial^4 x_1}{\partial z^4} \end{bmatrix}$$

und Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid x_1 \in H^4(0, 1), x_2 \in H^2(0, 1), x_1(0) = \frac{\partial x_1}{\partial z}(0) = x_2(0) = \frac{\partial x_2}{\partial z}(0) = 0, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}(1) = \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}(1) + \mathbf{k}_2^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(1), \frac{\partial^3 x_1}{\partial z^3}(1) = \mathbf{k}_3^T \mathbf{x}(1) + \mathbf{k}_4^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(1) \right\} \quad (3.153)$$

überführt werden kann. In einem ersten Schritt wird zunächst die Gesamtenergie des Systems

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_X^2 \quad (3.154)$$

als Kandidat für ein Lyapunovfunktional verwendet. Hieraus wird auch die übliche Bezeichnung der eingeführten Norm als **Energienorm** deutlich. Offensichtlich gilt somit

$$\begin{aligned} \frac{dE(\mathbf{x})}{dt} &= - \int_0^1 x_2 \frac{\partial^4 x_1}{\partial z^4} dz + \int_0^1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} dz \\ &= \left[ -x_2 \frac{\partial^3 x_1}{\partial z^3} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \right]_0^1 \\ &= -x_2(1) \frac{\partial^3 x_1}{\partial z^3}(1) + \frac{\partial x_2}{\partial z}(1) \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}(1) \end{aligned} \quad (3.155)$$

$$= -x_2(1) \left( \mathbf{k}_3^T \mathbf{x}(1) + \mathbf{k}_4^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(1) \right) + \frac{\partial x_2}{\partial z}(1) \left( \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}(1) + \mathbf{k}_2^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(1) \right). \quad (3.156)$$

Gleichung (3.155) zeigt deutlich, dass eine Verknüpfung zwischen dem angreifenden Moment an  $z = 1$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{\partial x_2}{\partial z}(1)$  sowie zwischen der Querkraft an  $z = 1$  und der Geschwindigkeit  $x_2(1)$  existiert. Dieser Zusammenhang wird auch als **Kollokation** bezeichnet, so dass das Moment und die Geschwindigkeit sowie die Querkraft und die Winkelgeschwindigkeit so genannte **kollokierte Größen** bezeichnen. Die Eigenschaft der Kollokation erweist sich insbesondere für die weitere Analyse der Stabilität als vorteilhaft. Aus diesem Grund wird

im Folgenden zur Illustration  $\mathbf{k}_1^T = \mathbf{k}_2^T = \mathbf{k}_4^T = \mathbf{0}$ ,  $k_{3,1} = 0$ ,  $k_{3,2} = K$  gewählt, womit sich mit (3.156) das Ergebnis

$$\frac{dE(\mathbf{x})}{dt} = -Kx_2^2(1) \quad (3.157)$$

ergibt. Die Gesamtenergie nimmt folglich entlang der Lösungstrajektorien des Systems ab, d.h. das betrachtete System ist **dissipativ**. Andererseits kann hieraus keine Abschätzung der Form  $\dot{E} \leq -\gamma E$ ,  $\gamma > 0$  getroffen werden, aus der sich auf exponentielle Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  schließen lässt. Um dies zu erreichen, wird im Weiteren das Lyapunovfunktional

$$V(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) + \epsilon \rho(\mathbf{x})$$

mit  $E(\mathbf{x})$  aus (3.154) gewählt. Der additive Term  $\epsilon \rho(\mathbf{x})$  wird als **Energie-Multiplikator** bezeichnet, wobei  $\epsilon$  einen Freiheitsgrad darstellt, der im Weiteren geeignet bestimmt wird und  $\rho(\mathbf{x})$  in der Form

$$\rho(\mathbf{x}) = \int_0^1 zx_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} dz \quad (3.158)$$

angesetzt wird. Zum Nachweis, dass eine Konstante  $\gamma > 0$  existiert, so dass  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\gamma V(\mathbf{x})$ , werden einige Abschätzungen benötigt. Aus

$$\frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} = \int_0^1 z \left( x_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} - \frac{\partial^4 x_1}{\partial z^4} \frac{\partial x_1}{\partial z} \right) dz$$

folgt wegen

$$\int_0^1 z \frac{\partial^4 x_1}{\partial z^4} \frac{\partial x_1}{\partial z} dz = \left[ z \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial^3 x_1}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \frac{\partial x_1}{\partial z} \right]_0^1 + \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \right)^2 dz - \int_0^1 z \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \frac{\partial^3 x_1}{\partial z^3} dz$$

mit

$$\begin{aligned} \int_0^1 z \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \frac{\partial^3 x_1}{\partial z^3} dz &= \left[ z \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \right)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \right)^2 dz - \int_0^1 z \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \frac{\partial^3 x_1}{\partial z^3} dz \\ \Rightarrow \int_0^1 z \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \frac{\partial^3 x_1}{\partial z^3} dz &= \frac{1}{2} \left[ z \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \right)^2 \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \right)^2 dz \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_0^1 zx_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} dz &= [zx_2^2]_0^1 - \int_0^1 x_2^2 dz - \int_0^1 zx_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} dz \\ \Rightarrow \int_0^1 zx_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} dz &= \frac{1}{2} [zx_2^2]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x_2^2 dz \end{aligned}$$

und den Randbedingungen gemäß der Definition von  $D(A)$  in (3.153), dass

$$\frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} = -Kx_2(1) \frac{\partial x_1}{\partial z}(1) + \frac{1}{2} x_2^2(1) - \frac{3}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \right)^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^1 x_2^2 dz.$$

Zur weiteren Abschätzung dieses Resultats kann folgendes Ergebnis herangezogen werden.

**Proposition 3.1.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , dann gilt für alle  $\epsilon > 0$ , dass

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon} \quad \text{bzw.} \quad -2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}.$$

*Beweis.* Da  $(\epsilon a \mp b)^2 \geq 0$  gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ , dass  $\epsilon^2 a^2 \mp 2\epsilon ab + b^2 \geq 0$  bzw.  $\epsilon^2 a^2 + b^2 \geq \pm 2\epsilon ab$ . Mit  $\epsilon > 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

Hieraus ist leicht ersichtlich, dass für  $K \geq 0$

$$-Kx_2(1) \frac{\partial x_1}{\partial z}(1) \leq \frac{K}{2} \left[ \epsilon \left( \frac{\partial x_1}{\partial z}(1) \right)^2 + \frac{x_2^2(1)}{\epsilon} \right] \leq \frac{K}{2} \left[ \epsilon \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \right)^2 dz + \frac{x_2^2(1)}{\epsilon} \right],$$

wobei die letzte Abschätzung direkt aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung folgt und hier  $\frac{\partial x_1}{\partial z} = \int_0^1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} dz$  genutzt wurde. Zusammenfassend ergibt sich somit

$$\frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{K}{\epsilon}\right) x_2^2(1) - \frac{1}{2}(3 - K\epsilon) \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}\right)^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^1 x_2^2 dz.$$

Für  $3 - K\epsilon > 1$  bzw.  $\epsilon < 2/K$  folgt

$$\frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{K}{\epsilon}\right) x_2^2(1) - \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_X^2 = -E(\mathbf{x}) + \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{K}{\epsilon}\right) x_2^2(1)}_{= C}.$$

Es gelte im Weiteren  $C \geq 0$ , d.h.  $\epsilon \geq -K$  was für  $K \geq 0$  bzw.  $\epsilon > 0$  direkt erfüllt werden kann.

Neben der Abschätzung von  $\dot{\rho}(\mathbf{x})$  durch  $E(\mathbf{x})$  kann auch  $|\rho(\mathbf{x})|$  durch die Gesamtenergie beschränkt werden. Hierzu kann folgendes Ergebnis herangezogen werden.

**Proposition 3.2.** Für  $\mathbf{x} \in X$  gilt

$$\mp \int_0^1 x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} dz \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ x_2^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}\right)^2 \right] dz.$$

*Beweis.* Es gilt

$$0 \leq \int_0^1 \left( \frac{x_2}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial x_1}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ x_2^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}\right)^2 \right] dz \pm \int_0^1 x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} dz$$

womit direkt die Behauptung folgt. □

Offensichtlich folgt somit

$$\begin{aligned} |\rho(\mathbf{x})| &\leq \int_0^1 |z| |x_2| \left| \frac{\partial x_1}{\partial z} \right| dz \leq \int_0^1 |x_2| \left| \frac{\partial x_1}{\partial z} \right| dz \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ x_2^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}\right)^2 \right] dz \\ &\leq \left( \frac{\partial x_1}{\partial z}(0) \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ x_2^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}\right)^2 \right] dz \\ &\leq 2 \int_0^1 \left[ x_2^2 + \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}\right)^2 \right] dz = 4E(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

wobei zur Einführung des Terms  $4\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}\right)^2$  die Poincaré–Ungleichung ausgenutzt wurde. Mit diesem Ergebnis folgt unmittelbar, dass für  $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$  bzw. für  $\rho(\mathbf{x}) < 0$  das Lyapunovfunktional  $V(\mathbf{x}) \leq (1 + 4\epsilon)E(\mathbf{x})$  bzw.  $V(\mathbf{x}) \geq (1 - 4\epsilon)E(\mathbf{x})$  für  $-\frac{1}{4} < \epsilon < \frac{1}{4}$  erfüllt. Die ermittelten Abschätzungen können nun direkt zur Abschätzung der Ableitung  $\dot{V}(\mathbf{x})$  herangezogen werden

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= \frac{dE(\mathbf{x})}{dt} + \epsilon \frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} \leq -\epsilon E(\mathbf{x}) - (K - \epsilon C) x_2^2(1) \\ &\leq -\epsilon E(\mathbf{x}) && \text{für } K - \epsilon C \geq 0 \text{ bzw. } \epsilon \leq K \\ &\leq -\frac{\epsilon}{1 + 4\epsilon} V(\mathbf{x}) && \text{da } E \geq V/(1 + 4\epsilon). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Des Weiteren liefert die Zusammenfassung der in den vorangegangenen Schritten bestimmten Grenzen von  $\epsilon$ , dass

$$\epsilon > 0 \quad \wedge \quad \epsilon < \min \left\{ K, \frac{2}{K}, \frac{1}{4} \right\}. \quad (3.160)$$

Insbesondere folgt aus (3.159) das exponentielle Abklingen des Lyapunovfunktionals  $V(\mathbf{x})$  bzw. der Gesamtenergie  $E(\mathbf{x})$  gemäß

$$V(\mathbf{x}) \leq \exp \left( -\frac{\epsilon t}{1 + 4\epsilon} \right) V(\mathbf{x}(0)) \leq (1 + 4\epsilon) \exp \left( -\frac{\epsilon t}{1 + 4\epsilon} \right) E(\mathbf{x}(0)) \quad (3.161)$$

bzw.

$$E(x) \leq \frac{1+4\epsilon}{1-4\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon t}{1+4\epsilon}\right) E(x(0)), \quad (3.162)$$

womit wegen  $E(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2$  auch die exponentielle Stabilität der Ruhelage  $x_R = 0$  des Systems unter der Geschwindigkeits-Rückführung  $u_2(t) = Kx_2(1, t)$  für  $K > 0$  folgt.

Dieses an sich eher wenig komplexe Beispiel illustriert den im Rahmen der Anwendung der direkten Methode von Lyapunov erforderlichen mathematischen Aufwand zum Nachweis der exponentiellen Stabilität. Es sei bemerkt, dass im Fall des kollokierten Eingriffs über ein externes Moment der Form  $u_1(t) = K \frac{\partial x_2}{\partial z}(1, t)$  bislang kein Energie-Multiplikator bekannt ist, obwohl mittels des in Korollar 3.2 angeführten Frequenzbereich-Tests die exponentielle Stabilität des Systems nachgewiesen werden kann (vgl. Luo u. a., 1999, S. 206).

### 3.3.3.4 Verallgemeinerungen

Für die bislang diskutierte direkte Methode zum Nachweis der Stabilität eines SVPn im Rahmen der Lyapunov-Theorie existieren gewisse Verallgemeinerungen, die weitere Möglichkeiten zum Nachweis asymptotischer (allerdings nicht exponentieller) Stabilität einer Ruhelage bieten, wenn die Kriterien von Satz 3.15 nicht nachweisbar sind. Diese werden im Folgenden der Vollständigkeit halber kurz zusammengefasst. Hierbei wird insbesondere die Tatsache, dass unendlich-dimensionale Funktionenräume im Allgemeinen nicht kompakt sind, d.h. dass aus  $\dot{V}(x) \leq 0$  bzw.  $\dot{V}(x) < 0$  nicht auf Stabilität geschlossen werden kann, im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen. Im Weiteren bezeichnet  $T(t)$  eine stetige kontrahierende (nichtlineare) Halbgruppe definiert auf einer abgeschlossenen Teilmenge  $D(T)$  eines reellen Banachraums  $X$ . Sei  $x \in D(T)$ , dann bezeichnen

- $\gamma(x) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)x$  den **Orbit durch  $x$** , und
- $\omega(x) = \{y \in D(T) \mid y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x \text{ mit, } t_n < t_{n+1}, \text{ und } t_n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty\}$  die (möglicherweise leere)  **$\omega$ -Grenzmenge von  $x$** .

Es stellt sich somit die Frage, wann  $\omega(x)$  eine nichtleere Menge darstellt. Eine hinreichende Bedingung liefert der folgende Satz.

#### Satz 3.16

Sei  $\gamma(x)$  für  $x \in D(T)$  relativ kompakt (d.h.  $\overline{\gamma(x)}$  ist kompakt). Dann ist  $\omega(x)$  nichtleer, kompakt, zusammenhängend<sup>12</sup> und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)x, \omega(x)) = 0.$$

Hierbei bezeichnet  $d(y, \Omega)$  für  $y \in Y$  und  $\Omega \subset Y$  den Abstand von  $y$  zu  $\Omega$ , d.h.

$$d(y, \Omega) = \inf_{w \in \Omega} \|y - w\|_Y.$$

Der Beweis dieses Satzes ist z.B. in Luo u. a., 1999 zu finden. Unter der Voraussetzung, dass die relative Kompaktheit des Orbits  $\gamma(x)$  gezeigt und die  $\omega$ -Grenzmenge von  $x$  bestimmt werden kann, ermöglicht dies die Charakterisierung des asymptotischen Verhaltens der Lösung  $\varphi_t(x) = T(t)x$ . Dies führt zum **Invarianzprinzip von LaSalle**.

#### Satz 3.17: Invarianzprinzip von LaSalle

Sei  $V(x)$  ein Lyapunovfunktional in  $D(T)$  und sei  $\mathcal{E}$  die größte positiv invariante Teilmenge von  $\{x \in D(T) \mid \dot{V}(x) = 0\}$ . Falls  $x \in D(T)$  und  $\gamma(x)$  relativ kompakt ist, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)x, \mathcal{E}) = 0.$$

Invarianz von  $\mathcal{E}$  unter  $T(t)$  bezeichnet hier, dass  $T(t)\mathcal{E} = \mathcal{E}$  für alle  $t \geq 0$ .

Für einen Beweis von Satz 3.17 wird auf Luo u. a., 1999 verwiesen. Die Sätze 3.16 und 3.17 liefern somit ein Kriterium, mit dem gezeigt werden kann, dass für alle  $x \in D(T)$  der Abstand der Trajektorie  $T(t)x$  von der  $\omega$ -Grenzmenge bzw. von  $\mathcal{E}$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt. Dies impliziert asymptotische Stabilität falls  $\mathcal{E} = \{0\}$ .

<sup>12</sup>Somit kann  $\omega(x)$  nicht in zwei disjunkte nichtleere offene Mengen zerlegt werden.

Aus mathematischer Sicht erweist sich jedoch der Nachweis der relativen Kompaktheit des Orbits  $\gamma(x)$  als äußerst einschränkend. Eine Nachweismöglichkeit bietet der folgende Satz.

**Satz 3.18**

Sei  $A$  ein dissipativer Operator in einem reellen Banachraum  $X$  mit

$$\overline{D(A)} \subset \text{ran}\{I - \lambda A\}$$

für alle hinreichend kleinen  $\lambda$  und sei  $T(t)$  die kontrahierende Halbgruppe definiert durch

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x.$$

Des Weiteren wird angenommen, dass  $0 \in \text{ran}\{A\}$  und  $(I - \lambda A)^{-1}$  kompakt sei für ein  $\lambda > 0$ . Dann ist  $\gamma(x)$  relativ kompakt für alle  $x \in \overline{D(A)}$ .

Anwendungen der in diesem Abschnitt zusammengefassten Methoden findet man z.B. in Shifman, 1993; Luo u. a., 1999; Kugi und Thull, 2005; Meurer und Kugi, 2011.

### 3.4 Regelungsentwurf mittels Zustandsrückführung

Die in den vorangegangenen Abschnitten eingeführten funktionalanalytischen und systemtheoretischen Grundlagen der Analyse verteilt-parametrischer Systeme in unendlich-dimensionalen Funktionenräumen werden im Folgenden zum Entwurf von stabilisierenden Zustandsrückführungen (mit Zustandsbeobachter) herangezogen. Hierbei wird der Schwerpunkt auf die Stabilisierung des Zustandsprofils innerhalb des örtlichen Definitionsbereichs, bzw. in gewissen Teilmengen desselben, gelegt. In der abstrakten operatortheoretischen Schreibweise gemäß (3.86)–(3.88), d.h.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0 \tag{3.163}$$

$$x(0) = x_0 \in D(A) \tag{3.164}$$

$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0. \tag{3.165}$$

stellt sich somit die Frage, ob eine **realisierbare Zustandsrückführung (ggf. mit Zustandsbeobachter)** der Form

$$u(t) = Kx(t) \quad \text{bzw.} \quad u(t) = K\hat{x}(t), \quad \hat{x} \in X_N \subset X \tag{3.166}$$

existiert, wobei  $K$  ein beschränkter linearer Operator von  $X$  bzw. eines endlich-dimensionalen Unterraumes  $X_N \subset X$  auf  $U$  ist.

Zum eigentlichen Regler- und Beobachterentwurf werden im Folgenden zum einen Backstepping-basierte Verfahren und zum anderen spektrale bzw. approximative Verfahren vorgestellt. Während erstere eine geeignete Transformation der Systemgleichungen in ein vorgegebenes Zielsystem mit gewünschten dynamischen Eigenschaften verfolgen (Krstic und Smyshlyaev, 2008; Meurer, 2013b) werden bei letzteren im Prinzip die entsprechenden modalen Koordinaten und somit die Amplituden der Eigenfunktionen geregelt (Gilles, 1973; Franke, 1987). Diese Ergebnisse ermöglichen eine weitere Verallgemeinerung der Methodik zum Entwurf stabilisierender Zustandsregler mit -beobachter auf der Basis reduzierter endlich-dimensionaler Modelle. Insbesondere wird in diesem Zusammenhang die Frage der exponentiellen Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit endlich-dimensionaler Zustandsrückführung einfühend diskutiert.

#### 3.4.1 Backstepping-basierte Zustandsrückführung

Die folgenden Ausführungen dienen einer kurzen und beispielhaften Einführung in die so genannte Backstepping-Methode zum Entwurf (exponentiell) stabilisierender Zustandsrückführungen für parabolische SVPn mit Randeingriff. Für weitergehende Ausführungen wird auf die Literatur, insbesondere Smyshlyaev und Krstic, 2004; Smyshlyaev und Krstic, 2005b; Vazquez und Krstic, 2008a; Vazquez und Krstic, 2008b; Krstic und Smyshlyaev, 2008; Meurer und Kugi, 2008; Meurer und Kugi, 2009; Meurer, 2013c, verwiesen.

### 3.4.1.1 Stabilisierungsaufgabe und Backstepping-Methode

Die Zielsetzung der Backstepping-Methode besteht darin, das für  $\alpha > \pi^2$  instabile Diffusions-Reaktionssystem

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \alpha x(z, t), \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (\alpha > 0) \quad (3.167)$$

$$x(0, t) = 0, \quad x(1, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (3.168)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (3.169)$$

durch den Entwurf einer geeigneten Zustandsrückführung in ein vorgegebenes exponentiell stabiles Zielsystem

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} - \beta w(z, t), \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (\beta \geq 0) \quad (3.170)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.171)$$

$$w(z, 0) = w_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (3.172)$$

zu überführen. Dies wird über die so genannte **Backstepping-Transformation**

$$w(z, t) = x(z, t) - \int_0^z k(z, \xi) x(\xi, t) d\xi \quad (3.173)$$

mit dem im Weiteren zu bestimmenden Integralkern  $k(z, \xi)$  erreicht. Der erste Schritt besteht damit in der Ermittlung der Gleichungen, denen  $k(z, \xi)$  gehorchen muss, um die gewünschte Transformation zu erzielen.

### 3.4.1.2 Bestimmung des Integralkerns

Hierzu werden die Gleichungen (3.170)–(3.172) des Zielsystems mit dem Ansatz (3.173) der Transformation unter der Ausnutzung der Gleichungen (3.167)–(3.169) des Originalsystems ausgewertet. Die entsprechende Differenziation von (3.173) führt somit auf

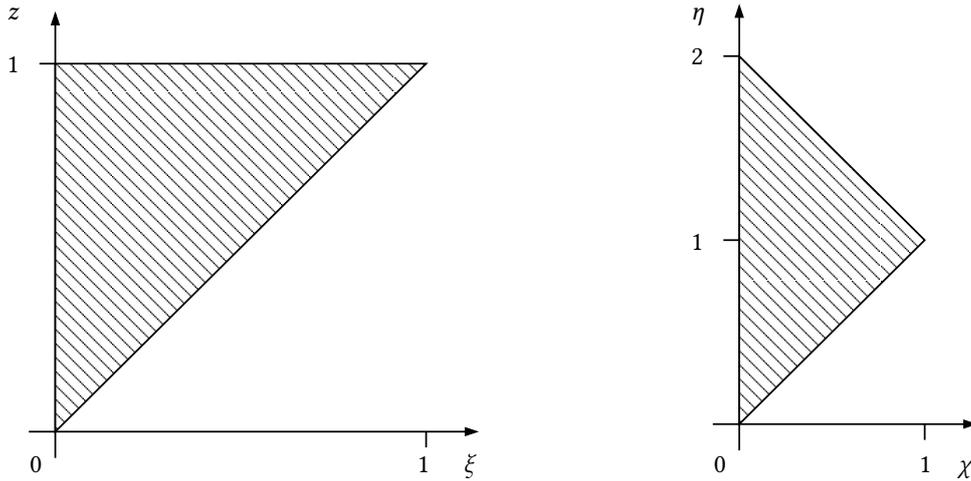
$$\begin{aligned} \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} - k(z, z)x(z, t) - \int_0^z \frac{\partial k(z, \xi)}{\partial z} x(\xi, t) d\xi \\ \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} - \underbrace{\left( \frac{\partial k}{\partial z}(z, z) + \frac{\partial k}{\partial \xi}(z, z) \right)}_{= \frac{dk}{dz}(z, z)} x(z, t) - k(z, z) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z}(z, z)x(z, t) \\ &\quad - \int_0^z \frac{\partial^2 k(z, \xi)}{\partial z^2} x(\xi, t) d\xi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} - \int_0^z k(z, \xi) \underbrace{\frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t}}_{= \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2} + \alpha x(\xi, t)} d\xi \\ &= \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \alpha x(z, t) - \left[ k(z, \xi) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} - \frac{\partial k(z, \xi)}{\partial \xi} x(\xi, t) \right]_{\xi=0}^{\xi=z} \\ &\quad - \int_0^z \left( \frac{\partial^2 k(z, \xi)}{\partial \xi^2} + \alpha k(z, \xi) \right) x(\xi, t) d\xi. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in (3.170) führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} + \beta w(z, t) = x(z, t) \left( \mu + 2 \frac{dk}{dz}(z, z) \right) - x(0, t) \frac{\partial k}{\partial \xi}(z, 0) + \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) k(z, 0) \\ &\quad + \int_0^z x(\xi, t) \left( \frac{\partial^2 k(z, \xi)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 k(z, \xi)}{\partial \xi^2} - (\alpha + \beta) k(z, \xi) \right) d\xi, \end{aligned}$$



**Abb. 3.7:** Definitionsgebiete für die PDgl. des Kerns: (links) in der  $(z, \xi)$ -Ebene mit  $\xi \in (0, 1)$ ,  $z \in (\xi, 1)$  und (rechts) in der  $(\chi, \eta)$ -Ebene mit  $\chi \in (0, 1)$ ,  $\eta \in (\chi, 2 - \chi)$ .

woraus sich unter Berücksichtigung der RBn (3.168) die Bestimmungsgleichungen des Integralkerns

$$\frac{\partial^2 k(z, \xi)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 k(z, \xi)}{\partial \xi^2} = \mu k(z, \xi), \quad \xi \in (0, 1), \quad z \in (\xi, 1) \quad (3.174)$$

$$2 \frac{dk}{dz}(z, z) + \mu = 0 \quad (3.175)$$

$$k(z, 0) = 0 \quad (3.176)$$

mit  $\mu = \alpha + \beta$  ergeben. Das dreiecksförmige Definitionsgebiet der PDgl. (3.174) zeigt Abbildung 3.7 (links). Die Randbedingung (3.175) ist dabei äquivalent zu

$$k(z, z) = -\frac{\mu}{2} z \quad (3.177)$$

Die folgende Lösung des Anfangs-Randwertproblems (3.174)–(3.176) beruht auf der Tatsache, dass die PDgl. (3.174) eine hyperbolische PDgl. in Form einer **modifizierten Wellengleichung** darstellt (vgl. Kapitel 1.2). Durch die Einführung neuer Koordinaten

$$\eta = z + \xi, \quad \chi = z - \xi \quad (3.178)$$

mit  $\bar{k}(\eta, \chi) = k(z, \xi)$  kann (3.174), (3.176), (3.177) in die **Normalform**

$$4 \frac{\partial^2 \bar{k}(\eta, \chi)}{\partial \eta \partial \chi} = \mu \bar{k}(\eta, \chi), \quad \chi \in (0, 1), \quad \eta \in (\chi, 2 - \chi) \quad (3.179)$$

$$\bar{k}(\eta, 0) = -\frac{\mu}{4} \eta \quad (3.180)$$

$$\bar{k}(\eta, \eta) = \bar{k}(\chi, \chi) = 0 \quad (3.181)$$

überführt werden. Das transformierte Definitionsgebiet in der  $(\chi, \eta)$ -Ebene zeigt Abbildung 3.7 (rechts). Die Lösung von (3.179)–(3.181) erfolgt im Weiteren durch eine **formale Integration** der PDgl. zunächst bzgl.  $\chi$  (von 0 bis  $\chi$ )

$$\frac{\partial \bar{k}(\eta, \chi)}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta}(\eta, 0) + \frac{\mu}{4} \int_0^\chi \bar{k}(\eta, q) dq \stackrel{(3.180)}{=} -\frac{\mu}{4} \left( 1 - \int_0^\chi \bar{k}(\eta, q) dq \right)$$

gefolgt von einer Integration bzgl.  $\eta$  (von  $\chi$  bis  $\eta$ , vgl. Abbildung 3.7 (rechts))

$$\bar{k}(\eta, \chi) = -\frac{\mu}{4} \left( \eta - \chi - \int_\chi^\eta \int_0^\chi \bar{k}(p, q) dq dp \right). \quad (3.182)$$

Diese implizite Formulierung in Form einer Integralgleichung zur Bestimmung von  $\bar{k}(\eta, \chi)$  kann mittels der

**Methode der sukzessiven Approximation** aufgelöst werden. Hierzu wird  $\bar{k}(\eta, \chi)$  als Reihe

$$\bar{k}(\eta, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{k}_n(\eta, \chi) \quad (3.183)$$

angesetzt, deren Koeffizienten rekursiv<sup>13</sup> entsprechend

$$\begin{aligned} \bar{k}_0(\eta, \chi) &= -\frac{\mu}{4}(\eta - \chi) \\ \bar{k}_n(\eta, \chi) &= \frac{\mu}{4} \int_{\chi}^{\eta} \int_0^{\chi} \bar{k}_{n-1}(p, q) dq dp, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

bestimmt werden. Mittels vollständiger Induktion kann gezeigt werden, dass sich die Reihenkoeffizienten zu

$$\bar{k}_n(\eta, \chi) = -\left(\frac{\mu}{4}\right)^{n+1} \frac{(\eta - \chi)\eta^n \chi^n}{n!(n+1)!} \quad (3.184)$$

ergeben. Die Auswertung der Reihe (3.183) mit (3.184) führt auf den geschlossenen Ausdruck

$$\bar{k}(\eta, \chi) = -\frac{\mu}{2}(\eta - \chi) \frac{I_1(\sqrt{\mu\eta\chi})}{\sqrt{\mu\eta\chi}},$$

wobei  $I_1(\cdot)$  eine Besselfunktion darstellt. In Originalkoordinaten ergibt sich somit

$$k(z, \xi) = -\mu\xi \frac{I_1(\sqrt{\mu(z^2 - \xi^2)})}{\sqrt{\mu(z^2 - \xi^2)}}. \quad (3.185)$$

### 3.4.1.3 Zustandsrückführung und Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Nachdem der Integrkern  $k(z, \xi)$  bestimmt ist, kann unmittelbar die zur Realisierung der Transformation des Originalsystems (3.167)–(3.169) in das exponentiell stabile Zielsystem (3.170)–(3.172) notwendige Zustandsrückführung ermittelt werden. Hierzu liefert die Auswertung der RB (3.168) an  $z = 1$  mit (3.173) unter Berücksichtigung der RB (3.171) für  $z = 1$  die Gleichung der **Zustandsreglers**

$$u = \int_0^1 k(1, \xi)x(\xi, t)d\xi = -\mu \int_0^1 \xi \frac{I_1(\sqrt{\mu(1 - \xi^2)})}{\sqrt{\mu(1 - \xi^2)}} x(\xi, t)d\xi. \quad (3.186)$$

Die Anwendung des Reglers setzt somit die Kenntnis des gesamten Zustandsprofils  $x(z, t)$  für alle  $z \in [0, 1]$  und  $t \geq 0$  voraus, weshalb die Implementierung des Reglers einen **Zustandsbeobachter** erfordert. Dabei kann beispielsweise analog die Backstepping-Methode angewandt werden (Smyshlyaev und Krstic, 2005a).

Im Folgenden soll nachgewiesen werden, dass die Anwendung des entworfenen Reglers (3.186) tatsächlich eine exponentielle Stabilisierung des Originalsystems bewirkt. Hierzu sei bemerkt, dass das Zielsystem (3.170)–(3.172) ein Rieszsches System darstellt, so dass dessen Stabilitätseigenschaften aus der Menge der Eigenwerte  $\lambda_k = -\beta - (k\pi)^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  abgeleitet werden können. Zudem ist das Zielsystem wohl-definiert im Zustandsraum  $X = L^2(0, 1)$ . Somit gilt für die  $L^2$ -Norm von  $w(z, t)$ , dass

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq e^{\lambda_1 t} \|w_0\|_{L^2}. \quad (3.187)$$

Des Weiteren folgt aus (3.173), dass

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq \|x(t)\|_{L^2} + \left\| \int_0^z k(z, \xi)x(\xi, t)d\xi \right\|_{L^2}.$$

Wegen

$$\left\| \int_0^z k(z, \xi)x(\xi, t)d\xi \right\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left| \int_0^z k(z, \xi)x(\xi, t)d\xi \right|^2 dz \leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |k(z, \xi)||x(\xi, t)|d\xi \right)^2 dz$$

<sup>13</sup>Die Rekursionsvorschrift kann leicht durch Einsetzen von (3.183) in (3.182) ermittelt werden.

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 \|k(z)\|_{L^2}^2 \|x(t)\|_{L^2}^2 dz \quad (\text{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung}) \\ &\leq C^2 \|x(t)\|_{L^2}^2, \quad (\text{Beschränktheit von } k(z, \xi)) \end{aligned}$$

mit hinreichend großem  $C > 0$  folgt somit

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq (1 + C)\|x(t)\|_{L^2}. \quad (3.188)$$

Der Stabilitätsnachweis erfordert zusätzlich die Kenntnis der **inversen Backstepping-Transformation**

$$x(z, t) = w(z, t) + \int_0^z g(z, \xi) w(\xi, t) d\xi \quad (3.189)$$

mit dem Integrationskern  $g(z, \xi)$ . Zur expliziten Bestimmung von  $g(z, \xi)$  kann analog zur Bestimmung von  $k(z, \xi)$  vorgegangen werden, wobei die Gleichungen des Zielsystems in die Gleichungen des Originalsystems transformiert werden. Im Weiteren ist es jedoch ausreichend die Existenz und Beschränktheit von  $g(z, \xi)$  vorauszusetzen, die aus der Theorie Volterrascher Integralgleichungen und der Kenntnis von  $k(z, \xi)$  abgeleitet werden kann. Eine den obigen Zeilen entsprechende Abschätzung für (3.189) führt somit auf

$$\|x(t)\|_{L^2} \leq (1 + D)\|w(t)\|_{L^2}.$$

für ein hinreichend großes  $D > 0$ . Somit ergibt sich, dass

$$\|x(t)\|_{L^2} \stackrel{(3.187)}{\leq} (1 + D)e^{\lambda_1 t} \|w_0\|_{L^2} \stackrel{(3.188)}{\leq} \underbrace{(1 + C)(1 + D)}_{=M} e^{\lambda_1 t} \|x_0\|_{L^2},$$

womit die exponentielle Stabilisierung des Originalsystems mit dem Zustandsregler (3.186) nachgewiesen ist.

### 3.4.1.4 Verallgemeinerungen

Ausgehend von der obigen beispielhaften Einführung in Backstepping-basierte Entwurfsmethoden können weitere Problemstellungen in einem ähnlichen Rahmen analysiert werden:

- Trajektorienfolgeregelung für lineare parabolische PDgln. mit orts- und zeitvariablen Parametern (Meurer und Kugi, 2009; Meurer, 2013b);
- Stabilisierung von gewissen Klassen nichtlinearer parabolischer PDgln. (Vazquez und Krstic, 2008a; Vazquez und Krstic, 2008b);
- Trajektorienfolgeregelung für gewisse Klassen nichtlinearer parabolischer PDgln. (Meurer und Kugi, 2008; Meurer, 2013b);
- Stabilisierung von Wellengleichungen (Krstic, Guo u. a., 2008; Smyshlyaev, Cerpa u. a., 2010);
- Beobachterentwurf (Smyshlyaev und Krstic, 2005a; Krstic und Smyshlyaev, 2008; Jadachowski u. a., 2012; Meurer, 2013b; Jadachowski u. a., 2013; Meurer, 2013a; Jadachowski u. a., 2015);
- Parabolische PDgln. mit höher-dimensionalen Definitionsbereich (Meurer, 2013b; Jadachowski u. a., 2015).

Zudem sei auf die weiterführende Einführung und Zusammenfassung in Krstic und Smyshlyaev, 2008 und relevante aktuelle Literatur z.B. Anfinsen u. a., 2016; Hu u. a., 2016; Vazquez und Krstic, 2016; Qi u. a., 2015; Coron u. a., 2013; Meglio u. a., 2013; Freudenthaler und Meurer, 2020 verwiesen.

## 3.4.2 Zustandsregelung auf Basis reduzierter Modelle

Die weiteren Ausführungen orientieren sich im Wesentlichen an den Ergebnissen in Curtain, 1985; Balas, 1998. Hierbei soll insbesondere die Frage behandelt werden, wie für verteilt-parametrische Systeme endlich-dimensionale Zustandsregler entworfen werden können, deren Realisierung nur eine endliche und möglichst geringe Anzahl an Aktuatoren und Sensoren benötigen. Dies beinhaltet die Frage nach der Stabilität des mit den entworfenen Reglern geschlossenen Regelkreises. Der Ausgangspunkt der Analyse ist dabei die abstrakte

Formulierung

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad t > 0 \quad (3.190)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in D(A) \quad (3.191)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t), \quad t \geq 0. \quad (3.192)$$

mit

- (i)  $A$  einem unbeschränkten abgeschlossenen linearen Operator, der infinitesimaler Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  auf einem Hilbertraum  $X$  ist,
- (ii)  $B$  einem beschränkten linearen Operator von einem Hilbertraum  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  auf  $X$
- (iii)  $C$  einem beschränkten linearen Operator von  $X$  auf einen Hilbertraum  $Y \subseteq \mathbb{R}^p$
- (iv)  $D(A)$  dem Definitionsbereich von  $A$ , der dicht in  $X$  liegt.

### 3.4.2.1 Zerlegung des Zustandsraumes mittels Projektionen

Der Entwurf einer endlich-dimensionalen Zustandsrückführung basiert im Weiteren auf der Zerlegung des Zustandsraumes  $X$  in einen endlich-dimensionalen Unterraum  $X_N \subseteq D(A)$  und in einen residualen Unterraum  $X_R$ , so dass

$$X = X_N \oplus X_R.$$

Die jeweiligen Abbildungen von  $X$  in  $X_N$  bzw. von  $X$  in  $X_R$  stellen so genannte Projektionen dar und werden mit  $P_N$  bzw.  $P_R$  bezeichnet. Eine Projektion ist hierbei wie folgt definiert (Curtain und Zwart, 1995).

#### Definition 3.23: Projektion

Ein beschränkter Operator  $P : X \rightarrow X$  wird als Projektion bezeichnet, wenn  $P^2 := PP = P$  ist. Der Operator wird orthogonale Projektion genannt, wenn zudem gilt  $P^* = P$ , d.h.  $P$  ist selbst-adjungiert.

**Beispiel 3.25 (Rieszsches System).** Sei  $A : D(A) \rightarrow X$  ein Rieszscher Operator gemäß Definition 3.9 mit (einfachen) Eigenwerten  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und entsprechenden Eigenfunktionen  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die eine Riesz-Basis für  $X$  bilden. Sei zudem  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  die Menge der Eigenfunktionen des adjungierten Operators  $A^*$  die ebenfalls eine Riesz-Basis für  $X$  bilden, wobei gelte, dass  $\langle \phi_n, \psi_m \rangle_X = \delta_{n,m}$ . Gemäß den vorherigen Ausführungen erlaubt  $A$  eine Darstellung in der Form

$$A\mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle \mathbf{x}, \phi_n \rangle_X \psi_n.$$

Sei der Operator  $P_N : X \rightarrow X_N$  gegeben durch

$$P_N = \sum_{n=1}^N \langle \cdot, \psi_n \rangle_X \phi_n. \quad (3.193)$$

Offensichtlich definiert  $P_N$  eine Projektion, da gilt

$$P_N P_N = \sum_{n=1}^N \left\langle \sum_{j=1}^N \langle \cdot, \psi_j \rangle_X \phi_j, \psi_n \right\rangle_X \phi_n = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \cdot, \psi_j \rangle_X \langle \phi_j, \psi_n \rangle_X \phi_n = P_N.$$

Zudem ist  $P_N$  eine orthogonale Projektion, wenn  $A$  selbst-adjungiert ist, da dann  $\phi_n = \psi_n$  gilt. Die Projektion  $P_N$  wird oft auch im Rahmen der so genannten **modalen Zerlegung** des Zustandsraumes verwendet, bei der mittels  $P_N$  und der Projektion

$$P_R = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle \cdot, \psi_n \rangle_X \phi_n. \quad (3.194)$$

eine Zerlegung der spektralen Darstellung in ein  $N$ -dimensionales Teilsystem (über  $P_N$ ) sowie das entsprechende residuale unendlich-dimensionale Teilsystem (über  $P_R$ ) erzielt wird.

Mit der Zerlegung des Zustandsraums geht direkt eine Zerlegung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t)$  gemäß

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_N(t) + \mathbf{x}_R(t) = P_N \mathbf{x}(t) + P_R \mathbf{x}(t) = P_N \mathbf{x}_N(t) + P_R \mathbf{x}_R(t)$$

einher. Die letzte Gleichung ist eine direkte Konsequenz aus  $P_N^2 = P_N$  bzw.  $P_R^2 = P_R$ . Dies erlaubt insbesondere eine Aufspaltung des Systems (3.190)–(3.192) in die Teilsysteme

$$\frac{d\mathbf{x}_N(t)}{dt} = A_N \mathbf{x}_N(t) + A_{NR} \mathbf{x}_R(t) + B_N \mathbf{u}(t), \quad t > 0 \quad (3.195)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_R(t)}{dt} = A_{RN} \mathbf{x}_N(t) + A_R \mathbf{x}_R(t) + B_R \mathbf{u}(t), \quad t > 0 \quad (3.196)$$

$$\mathbf{y}(t) = C_N \mathbf{x}_N(t) + C_R \mathbf{x}_R(t), \quad t \geq 0, \quad (3.197)$$

mit  $A_N = P_N A = P_N A P_N$ ,  $A_{NR} = P_N A = P_N A P_R$ ,  $B_N = P_N B$ ,  $A_{RN} = P_R A = P_R A P_N$ ,  $A_R = P_R A = P_R A P_R$ ,  $B_R = P_R B$ ,  $C_N = C P_N$  und  $C_R = C P_R$ .

**Beispiel 3.26 (Rieszsches System (Beispiel 3.25 kont.)).** Die Eingangs- und Ausgangsoperatoren seien durch

$$B\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i u_i, \quad \mathbf{b}_i : U \rightarrow X \quad (3.198)$$

$$C\mathbf{x} = [\langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_1 \rangle_X, \dots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_p \rangle_X]^T, \quad \mathbf{c}_k : X \rightarrow Y \quad (3.199)$$

gegeben. Mit  $\mathbf{x}_N(t) = P_N \mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{x}_R(t) = P_R \mathbf{x}(t)$ , wobei  $P_N$  und  $P_R$  durch (3.193) und (3.194) definiert sind, ergibt sich für

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}(A) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

die Zerlegung in die beiden Teilsysteme entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_N(t)}{dt} &= \sum_{n=1}^N \langle A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n + \sum_{i=1}^m u_i(t) \sum_{n=1}^N \langle \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n \\ &= \Phi_N \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_1 \rangle_X \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_N \rangle_X \end{bmatrix} + \Phi_N \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_1, \boldsymbol{\psi}_1 \rangle_X & \langle \mathbf{b}_2, \boldsymbol{\psi}_1 \rangle_X & \dots & \langle \mathbf{b}_m, \boldsymbol{\psi}_1 \rangle_X \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{b}_1, \boldsymbol{\psi}_N \rangle_X & \langle \mathbf{b}_2, \boldsymbol{\psi}_N \rangle_X & \dots & \langle \mathbf{b}_m, \boldsymbol{\psi}_N \rangle_X \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.200) \end{aligned}$$

mit  $\Phi_N = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N]$  und

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_R(t)}{dt} &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n + \sum_{i=1}^m u_i(t) \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n \\ &= \Phi_R \begin{bmatrix} \lambda_{N+1} & & \\ & \lambda_{N+2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_{N+1} \rangle_X \\ \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_{N+2} \rangle_X \\ \vdots \end{bmatrix} + \Phi_R \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_1, \boldsymbol{\psi}_{N+1} \rangle_X & \dots & \langle \mathbf{b}_m, \boldsymbol{\psi}_{N+1} \rangle_X \\ \langle \mathbf{b}_1, \boldsymbol{\psi}_{N+2} \rangle_X & \dots & \langle \mathbf{b}_m, \boldsymbol{\psi}_{N+2} \rangle_X \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (3.201) \end{aligned}$$

wobei  $\Phi_R = [\boldsymbol{\phi}_{N+1}, \boldsymbol{\phi}_{N+2}, \dots]$ . Dabei sei angemerkt, dass sowohl  $\mathbf{x}_N(t)$  als auch  $\mathbf{x}_R(t)$  gemäß der Konstruktion der Projektionen  $P_N$  und  $P_R$  Funktionen von  $z$  und  $t$  darstellen. Ein Vergleich mit (3.195) und (3.196) zeigt unmittelbar, dass hier aufgrund der Riesz-Basis Eigenschaft der Komponenten  $\boldsymbol{\phi}_n$  und  $\boldsymbol{\psi}_n$  für die Kopplungsterme gilt  $A_{NR} = 0$  und  $A_{RN} = 0$ .

Die bekannte modale oder spektrale Systemdarstellung in der Form gewöhnlicher Differenzialgleichungen in den entsprechenden Fourier-Koeffizienten erhält man aus (3.200) und (3.201) wegen  $\mathbf{x}_N(t) = \sum_{n=1}^N \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n$  und  $\mathbf{x}_R(t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n$  durch die sukzessive Projektion auf die Basis  $\{\boldsymbol{\psi}_n\}_{n=1}^N$  von  $X_N$  bzw.  $\{\boldsymbol{\psi}_n\}_{n=N+1}^{\infty}$  von

$X_R$ . Mit  $x_{n,N}(t) := \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  und  $x_{n,R}(t) := \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X$ ,  $n = N + 1, N + 2, \dots$  kann (3.200) in

$$\frac{dx_{n,N}(t)}{dt} = \lambda_n x_{n,N}(t) + \left[ \langle \mathbf{b}_1, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \quad \dots \quad \langle \mathbf{b}_m, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \right] \mathbf{u}(t), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.202)$$

überführt werden, während sich (3.201) entsprechend auf die Form

$$\frac{dx_{n,R}(t)}{dt} = \lambda_n x_{n,R}(t) + \left[ \langle \mathbf{b}_1, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \quad \dots \quad \langle \mathbf{b}_m, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \right] \mathbf{u}(t), \quad n = N + 1, N + 2, \dots \quad (3.203)$$

reduziert. Diese formale Äquivalenz zwischen (3.200), (3.201) und (3.202), (3.203) bzw. speziell zwischen  $X_N$  und  $\mathbb{R}^N$  wird auch als **Isomorphismus** bezeichnet.

Alternative Methoden zur Zerlegung des Zustandsraumes bieten beispielsweise gewichtete Residuenverfahren, darunter insbesondere die Galerkin-Methode.

### 3.4.2.2 Zustandsrückführung mit Zustandsbeobachter

Der eigentliche Entwurf einer realisierbaren endlich-dimensionalen Zustandsrückführung erfolgt anhand von (3.195) und (3.197) unter Vernachlässigung des Residuenanteils  $A_{NR}\mathbf{x}_R(t)$  und des Anteils  $C_R\mathbf{x}_R(t)$ , womit sich das Entwurfsmodell zu

$$\frac{d\mathbf{x}_N(t)}{dt} = A_N\mathbf{x}_N(t) + B_N\mathbf{u}(t), \quad t > 0 \quad (3.204)$$

$$\mathbf{y}(t) = C_N\mathbf{x}_N(t), \quad t \geq 0, \quad (3.205)$$

ergibt. Es ist leicht einsichtig, dass dieser Ansatz die exponentielle Stabilität der Residuendynamik bedingt, d.h. die Dimension des Entwurfsmodells ist so zu wählen, dass  $A_R$  der Generator einer exponentiell stabilen  $C_0$ -Halbgruppe  $T_R(t)$  ist mit  $\|T_R(t)\| \leq M_R \exp(-\omega_R t)$ ,  $M_R \geq 1$ ,  $\omega_R > 0$ . Die Rückführung kann nun beispielsweise gemäß

$$\mathbf{u}(t) = K_N \hat{\mathbf{x}}_N(t) \quad (3.206)$$

mit dem Zustandsbeobachter

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_N}{dt} = A_N \hat{\mathbf{x}}_N(t) + B_N \mathbf{u}(t) + L_N [\mathbf{y}(t) - C_N \hat{\mathbf{x}}_N(t)], \quad t \geq 0 \quad (3.207)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_N(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (3.208)$$

entworfen werden. Voraussetzung ist hierzu, dass das System  $\Sigma(A_N, B_N, C_N)$  vollständig steuerbar und beobachtbar ist.

Das Blockdiagramm des geschlossenen Regelkreis für (3.195)–(3.197) mit (3.206) sowie (3.207) und (3.208) zeigt Abbildung 3.8. Dementsprechend wird die Dynamik des geschlossenen Regelkreises durch die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N(t) \\ \mathbf{x}_R(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_N(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_N & A_{NR} & B_N K_N \\ A_{RN} & A_R & B_R K_N \\ L_N C_N & L_N C_R & A_N + B_N K_N - L_N C_N \end{bmatrix}}_{= M} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N(t) \\ \mathbf{x}_R(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_N(t) \end{bmatrix} \quad (3.209)$$

beschrieben. Insbesondere sind hierbei die so genannten „**Spillover**“-Effekte leicht zu identifizieren (Balas, 1978a; Balas, 1978b; Balas, 1978c; Gülich, 1984). Hierbei bewirkt der so genannte „**Control Spillover**“ eine Anregung der Residuendynamik  $\mathbf{x}_R(t)$  mittels des Terms  $B_R K_N$ . Falls kein Beobachter im Regelkreis enthalten ist ( $\hat{\mathbf{x}}_N(t) = \mathbf{x}_N(t)$ ) bzw. falls das Messsignal keinen Anteil von  $\mathbf{x}_R(t)$  beinhaltet ( $C_R = 0$ ) so wird hiermit nur eine ungewünschte Anregung der Residuendynamik erzielt, deren Dynamik bleibt jedoch unverändert. Dem gegenüber wird im Fall des so genannten „**Observation Spillover**“ eine Rückführung des im Messsignal vorhandenen Residuenanteils  $\mathbf{y}_R(t) = C_R \mathbf{x}_R(t)$  erzeugt, die eine ungewünschte Beeinflussung der Residuendynamik bewirkt. Folglich ist leicht einsichtig, dass hierdurch die Stabilität des geschlossenen Regelkreises verändert wird und dies im Extremfall sogar in einer instabilen Dynamik des geschlossenen Regelkreises resultiert.

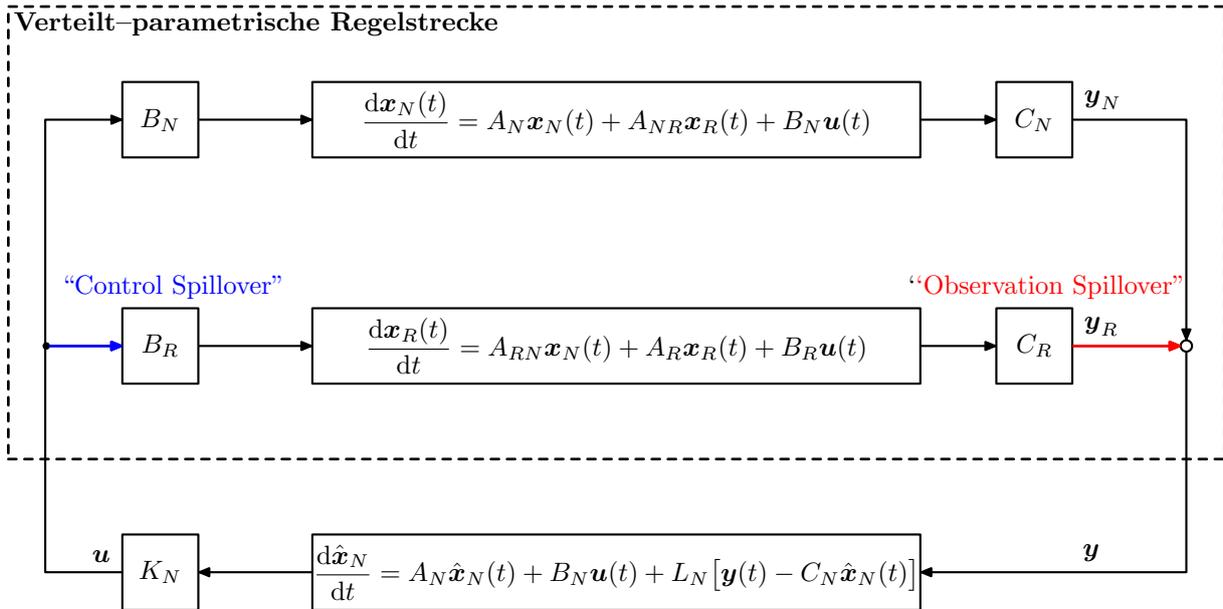


Abb. 3.8: Geschlossener Regelkreis für das verteilt-parametrische System (3.204), (3.205).

**Beispiel 3.27 (Rieszsches System (Beispiel 3.26 kont.)).** Die obigen Ausführungen können unmittelbar auf das betrachtete Beispiel eines Rieszsches Systems übertragen werden. Um jedoch die hierbei erzeugten „Spillover“-Effekte illustrieren zu können, werden im Folgenden zwei Beispiele Rieszscher Systeme genauer analysiert.

- **Instabiles Diffusions-Reaktionssystem:** Es kann leicht gezeigt werden, dass sich die Eigenwerte und Eigenfunktionen des selbst-adjungierten Operators

$$Ax = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \mu x, \quad D(A) = \{x \in H^2(0, 1) \mid x(0) = x(1) = 0\} \subset X = L^2(0, 1)$$

zu  $\lambda_n = \mu - (n\pi)^2$  und  $\phi_n(z) = \sqrt{2} \sin(n\pi z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ergeben. Für  $\mu > \pi^2$  treten somit Eigenwerte in der offenen rechten Halbebene auf, weshalb das System in diesem Fall instabil ist (es gilt die „spectrum determined growth assumption“). Der Stelleingriff erfolgt punktförmig an der Stelle  $\zeta \in (0, 1)$ , d.h.  $b(z) = \delta(z - \zeta)$ , womit sich mit den Analyseschritten aus Beispiel 3.26 und insbesondere (3.202), (3.203) die folgenden modalen bzw. spektralen Darstellungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1,N}(t) \\ \vdots \\ x_{N,N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,N}(t) \\ \vdots \\ x_{N,N}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1(\zeta) \\ \vdots \\ \phi_N(\zeta) \end{bmatrix} u(t)$$

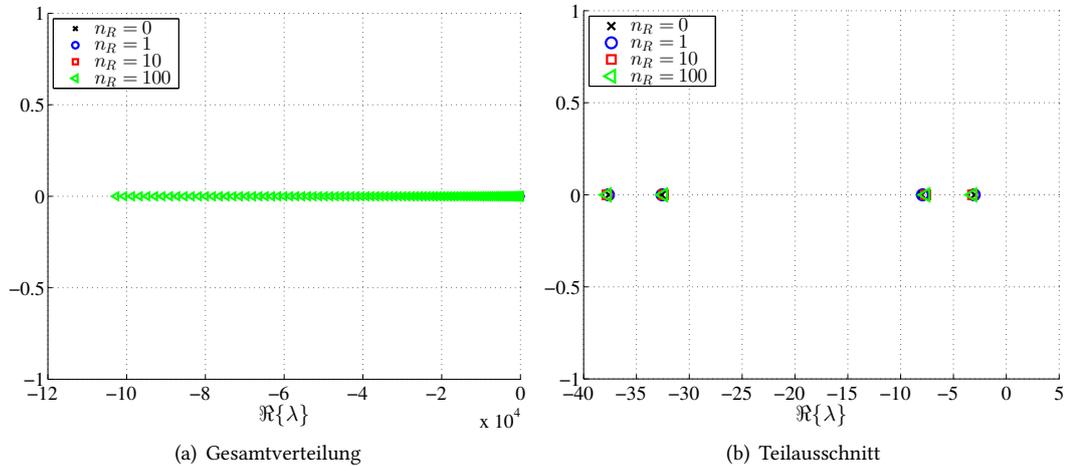
für das zum Reglerentwurf herangezogene Teilsystem und

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{N+1,R}(t) \\ x_{N+2,R}(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{N+1} & & \\ & \lambda_{N+2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N+1,R}(t) \\ x_{N+2,R}(t) \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{N+1}(\zeta) \\ \phi_{N+2}(\zeta) \\ \vdots \end{bmatrix} u(t)$$

für das Residuensystem ergeben. Insbesondere sei bemerkt, dass die Dimension  $N$  des Entwurfssystems so zu wählen ist, dass alle Eigenwerte mit positivem Realteil in diesem abgebildet sind. Wie in Abschnitt 3.2.3 gezeigt, erfordert die approximative Steuerbarkeit, dass  $\phi_n(\zeta) \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , was im Weiteren als erfüllt vorausgesetzt wird. Speziell werden die folgenden Werte angenommen  $\mu = \pi^2 + 2$ ,  $N = 2$  und  $\zeta = 1/\pi$ . Als Messgröße dient  $y(t) = x(\bar{\zeta}, t)$  mit  $\bar{\zeta} = 2/\pi$ , was sich entsprechend der obigen Ausführungen in  $C_N = [\sqrt{2} \sin(\pi\bar{\zeta}), \sqrt{2} \sin(2\pi\bar{\zeta})] = [\sqrt{2} \sin(2), \sqrt{2} \sin(4)]$  überträgt. Der Entwurf der Zustandsrückführung und des Zustandsbeobachters erfolgt mittels Eigenwertvorgabe für das Teilsystem mit dem Komponenten  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ . Die Eigenwerte für Zustandsregler und -beobachter werden dabei zu  $\lambda_n^{\text{reg}} = \lambda_n - 5$  und  $\lambda_n^{\text{beo}} = \lambda_n - 10$  für  $n = 1, 2$  gewählt. Zur numerischen Bestimmung von  $K_N$  und  $L_N$

wurde der Befehl `p1ace` von `MATLAB` verwendet.

Die sich hieraus ergebenden Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises durch die Analyse der Eigenwerte der Matrix  $M$  aus (3.209) für eine wachsende Anzahl von Komponenten des Residuensystems zeigt Abbildung 3.9. Diese numerischen Ergebnisse liefern zumindest einen Indikator, dass der geschlossene Regelkreis mit Zustandsregler und  $-$ beobachter auf Basis des  $N = 2$ -dimensionalen Entwurfssystems exponentiell stabil ist. Möglichkeiten diese Beobachtung auch theoretisch zu manifestieren werden im nachfolgenden Abschnitt einführend vorgestellt.



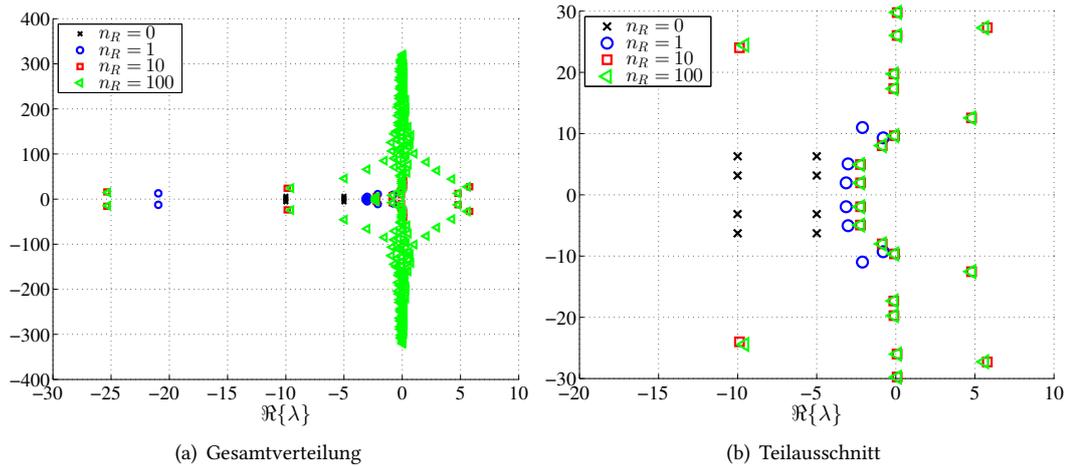
**Abb. 3.9:** Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises für das instabile Diffusions–Reaktionssystem bei Variation der Dimension  $n_R$  des Residuensystems. Hierbei entspricht  $n_R = 0$  der Analyse des geregelten Entwurfssystems.

- **Ungedämpfte Wellengleichung:** Wie in früheren Abschnitten gezeigt wurde, kann die lineare Wellengleichung durch die Einführung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t) = [x(\cdot, t), \frac{\partial x(\cdot, t)}{\partial t}]^T$  in eine Form gemäß (3.190) überführt werden, mit

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}(A) = \{\mathbf{x} \in H^2(0, 1) \oplus H^1(0, 1) \mid x_1(0) = x_1(1) = 0\} \subset X = H^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1).$$

Die weitere Konfiguration und die Eingangs– und Ausgangsoperatoren entsprechen denen des linearen Diffusions–Reaktionssystems. Das resultierende System kann leicht in die modale bzw. spektrale Form entsprechend (3.202), (3.203) überführt werden, wobei hierbei zu beachten ist, dass sämtliche Eigenwerte rein imaginär sind mit  $\lambda_n = in\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Der weitere Entwurf erfolgt identisch zu obigem Beispiel<sup>14</sup>.

Die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises durch die Analyse der Eigenwerte der Matrix  $M$  aus (3.209) für eine wachsende Anzahl von Komponenten des Residuensystems zeigt Abbildung 3.10. Hierbei wird, im Gegensatz zum Diffusions–Reaktionssystem, der Effekt des „Control Spillover“ sowie insbesondere des „Observation Spillover“ deutlich, der ein instabiles Verhalten des geschlossenen Regelkreises für  $n_R > 1$  bewirkt. Es sei bemerkt, dass die durch die Zustandsregelung mit  $-$ beobachter induzierte Instabilität im geschlossenen Regelkreis sehr häufig bei schwach oder ungedämpften Systemen zu beobachten ist und entsprechend auch experimentell nachprüfbar ist.



**Abb. 3.10:** Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises für die Wellengleichung bei Variation der Dimension  $n_R$  des Residuensystems. Hierbei entspricht  $n_R = 0$  der Analyse des gegebenen Entwurfssystems.

Zur Eindämmung der „Spillover“-Effekte sind zusätzliche Maßnahmen notwendig. Direkt einsichtig ist dabei die Forderung nach  $B_R = 0$  bzw.  $C_R = 0$ . Keine der beiden Forderungen kann im Allgemeinen für reale System exakt erfüllt werden, da dies die Platzierung von Aktoren und Sensoren derart erfordert, dass keine Anregung bzw. Messung der unendlich-dimensionalen Residuendynamik erfolgt. Eine Unterdrückung bzw. Abschwächung des „Spillovers“ kann z.B. durch die Anwendung dynamischer Regler oder Filter erfolgen (Balas, 1978b).

### 3.4.2.3 Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen die Anwendung der so entworfenen Rückführung auf die verteilt-parametrische Regelstrecke zu einer exponentiell stabilen Dynamik des geschlossenen Regelkreises führt. Zur Beantwortung dieser Frage wird das (an sich naheliegende) Konzept der so genannten **stabilisierenden Unterräume** („stabilizing subspaces“) herangezogen (Balas, 1998).

#### Definition 3.24: Stabilisierenden Unterräume

Das System  $\Sigma(A, B, -)$  aus (3.190) besitzt die stabilisierenden Unterräume  $X_N$  und  $X_R$ , falls, neben der Bedingung, dass  $A_R$  infinitesimaler Generator einer exponentiell stabilen  $C_0$ -Halbgruppe ist, auch  $A_0 = A + BK$  exponentiell stabil ist mit einer Stabilitätsreserve  $\omega_0$  für  $K : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $K = KP_N = K_N$ .

Diese Definition sagt im Wesentlichen aus, dass

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_N + B_N K_N & A_{NR} \\ A_{RN} + B_R K_N & A_R \end{bmatrix}$$

durch eine endlich-dimensionale Rückführung exponentiell stabilisierbar ist. Aus praktischer Sicht bedeutet dies, dass alle Zustände mit Ausnahme einer endlichen Anzahl die Stabilitätsreserve  $\omega_0$  aufweisen müssen und diejenigen die diese nicht erfüllen durch die Verstärkung  $K_N$  stabilisiert werden. Nach Curtain, 1985 ist diese Bedingung für alle Rieszischen Operatoren  $A$  erfüllt, falls  $\Sigma(A_N, B_N, C_N)$  minimal ist.

Ausgehend von diesen Betrachtungen gibt (Balas, 1998) den folgenden Satz zum Nachweis der exponentiellen Stabilität des mit (3.206)–(3.208) geschlossenen Regelkreises für das SVP (3.190)–(3.192) an.

#### Satz 3.19

Seien die Voraussetzungen

- (i)  $\Sigma(A_N, B_N, C_N)$  ist vollständig steuerbar und beobachtbar,
- (ii) die Beobacherverstärkung  $L_N$  in (3.207) ist so gewählt, dass das Spektrum von  $A_N - L_N C_N$  links einer Geraden  $-\hat{\omega}_N$ ,  $\hat{\omega}_N > 0$  in der komplexen Ebene liegt, d.h.  $A_N - L_N C_N$  ist Generator einer

<sup>14</sup>Sämtliche Formulierungen sind leicht auf die Indexmenge  $\mathbb{Z}$  übertragbar. Alternativ kann (3.190) auch in eine abstrakte Differenzialgleichung 2. Ordnung überführt werden.

Matrixexponentialfunktion  $T_N(t)$  mit  $\|T_N(t)\| \leq \hat{M}_N \exp(-\hat{\omega}_N t)$ ,  $t \geq 0$ ,

(iii)  $\|A_R\| \leq M_R \exp(-\omega_R t)$  mit  $M_R \geq 1$ ,  $\omega_R > 0$ , und

(iv) die Unterräume  $X_N$  und  $X_R$  sind stabilisierende Unterräume für  $\Sigma(A, B, -)$  wobei  $\|A_0\| = \|A + BK_N\| \leq M_0 \exp(-\omega_0 t)$  mit  $0 < \omega_0 < \hat{\omega}_N$ ,

erfüllt. Dann erzeugt die Rückführung (3.206)–(3.208) einen exponentiell stabilen geschlossenen Regelkreis

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A_0 \mathbf{x}(t) + BK_N \mathbf{e}_N(t), \quad t > 0$$

$$\frac{d\mathbf{e}_N(t)}{dt} = (A_N - L_N C_N) \mathbf{e}_N(t) + (L_N C_R - A_{NR}) \mathbf{x}(t), \quad t > 0$$

mit  $\mathbf{e}_N(t) = \hat{\mathbf{x}}_N(t) - \mathbf{x}_N(t)$ , falls

$$\|L_N C_R - A_{NR}\| \leq \frac{\omega_0}{M}$$

mit  $M = M_0 \hat{M}_N (1 + \eta + \eta^2)$  und  $\eta = \|BK_N\| / |\omega_0 - \hat{\omega}_N|$ .

Mögliche Anwendungen dieses Satzes und verwandter Resultate in Curtain, 1985 erfordern detaillierte Analysen des zugrunde liegenden verteilt-parametrischen Systems, so dass, ähnlich zu den in Abschnitt 3.3.3 diskutierten Methoden zum Stabilitätsnachweis nach Lyapunov, keine allgemein gültigen Entwurfskriterien abzuleiten sind.

#### Anmerkung 3.10

Falls die Projektion und damit die Zerlegung des Zustandsraumes unter Einbezug Eigenfunktionen des Systemoperators erfolgt, dann können weiterführende Stabilitätsaussagen bzw. Analyseschritte durchgeführt werden. Hierzu sei insbesondere auf die Ausführungen in Curtain, 1985 verwiesen, die zudem konkrete Kriterien zum Entwurf und der Wahl der Dimension des Entwurfssystems liefern.

## Literatur

- Anfinsen, H., M. Diagne, O. M. Aamo und M. Krstic (2016). „An adaptive observer design for  $n+1$  coupled linear hyperbolic PDEs based on swapping“. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 61.12, S. 3979–3990 (siehe S. 107).
- Balas, M. (1978a). „Active control of flexible dynamic systems“. In: *J Optim Theory Appl* 25.3, S. 415–436 (siehe S. 110).
- (1978b). „Feedback Control of Flexible Systems“. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 23.4, S. 673–679 (siehe S. 110, 113).
- (1978c). „Modal control of certain flexible dynamic systems“. In: *SIAM J. Control Optim.* 16.3, S. 450–462 (siehe S. 110).
- (1998). „Stable Feedback Control of Linear Distributed Parameter Systems: Time and Frequency Domain Conditions“. In: *J. Math. Anal. Appl.* 225.1, S. 144–167 (siehe S. 107, 113).
- Butkovskiy, A. (1982). *Green's functions and transfer functions handbook*. New York: John Wiley & Sons (siehe S. 90).
- Coron, J.-M., R. Vazquez, M. Krstic und G. Bastin (2013). „Local exponential  $H^2$  stabilization of a  $2 \times 2$  quasilinear hyperbolic system using backstepping“. In: *SIAM J. CO* 51, S. 2005–2035 (siehe S. 107).
- Curtain, R. (1985). „Pole Assignment for Distributed Systems by Finite-Dimensional Control“. In: *Automatica* 21.1, S. 57–67 (siehe S. 107, 113, 114).
- Curtain, R. und H. Zwart (1995). *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Texts in applied mathematics 21. New York: Springer-Verlag (siehe S. 51, 55, 59, 61, 62, 64–74, 86, 88, 92, 93, 108).
- Evans, L. (2002). *Partial Differential Equations*. Bd. 19. Graduate studies in mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society (siehe S. 55).
- Fattorini, H. (1968). „Boundary control systems“. In: *SIAM J. Control* 6.3, S. 349–388 (siehe S. 61).
- Franke, D. (1987). *Systeme mit örtlich verteilten parametern*. Springer-Verlag (siehe S. 96, 103).
- Freudenthaler, G. und T. Meurer (2020). „PDE-based multi-agent formation control using flatness and backstepping: Analysis, design and robot experiments“. In: *Automatica* 115, S. 108897 (siehe S. 107).
- Gilles, E. (1973). *Systeme mit verteilten Parametern*. R. Oldenbourg Verlag München Wien (siehe S. 90, 103).
- Gülich, H. (1984). „Zur Vermeidung von Spillover bei der Regelung schwingungsfähiger Systeme“. In: *Proc. 2. Symposium simulationstechnik*. Hrsg. von F. Breitenecker und W. Kleinert. Vienna, Austria: Springer-Verlag, S. 666–672 (siehe S. 110).
- Heuser, H. (1992). *Funktionalanalysis*. Third. Stuttgart: B.G. Teubner (siehe S. 64, 66).
- Ho, L. und D. Russell (1983). „Admissible input elements for systems in Hilbert space and a Carleson measure criterion“. In: *SIAM J. Control Optim.* 21.4, S. 614–640 (siehe S. 61).
- Hu, L., F. D. Meglio, R. Vazquez und M. Krstic (2016). „Control of homodirectional and general heterodirectional linear coupled hyperbolic PDEs“. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 61.11, S. 3301–3314 (siehe S. 107).
- Jadachowski, L., T. Meurer und A. Kugi (2013). „State estimation for parabolic PDEs with Reactive-Convective Non-Linearities“. In: *Proc. European Control Conference (ECC)*. Zurich (CH), S. 1603–1608 (siehe S. 107).
- (2015). „Backstepping observers for linear PDEs on higher-dimensional spatial domains“. In: *Automatica* 51.1, S. 85–97 (siehe S. 107).
- Jadachowski, L., T. Meurer und A. Kugi (2012). „An Efficient Implementation of Backstepping Observers for Time-Varying Parabolic PDEs“. In: *IFAC Proceedings Volumes*. 7th Vienna International Conference on Mathematical Modelling 45.2, S. 798–803 (siehe S. 107).
- Jüngel, A. (2001). *Eine Einführung in die Halbgruppentheorie*. Univ. Konstanz (siehe S. 55, 61, 62).
- Kato, T. (1980). *Perturbation theory for linear operators*. Berlin: Springer (siehe S. 66).
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear systems*. 3rd. Upper Saddle River (NJ): Prentice-Hall (siehe S. 94).
- Komornik, V. (1994). *Exact controllability and stabilization – the multiplier method*. Chichester: John Wiley & Sons (siehe S. 98).
- Krstic, M. (1999). „On global stabilization of Burgers' equation by boundary control“. In: *Syst. Control Lett.* 37, S. 123–141 (siehe S. 96).
- Krstic, M., B. Guo, A. Balogh und A. Smyshlyaev (2008). „Output-feedback stabilization of an unstable wave equation“. In: *Automatica* 44.1, S. 63–74 (siehe S. 107).
- Krstic, M. und A. Smyshlyaev (2008). *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs*. Philadelphia: SIAM (siehe S. 103, 107).
- Kugi, A. (2012). *Regelungssysteme* (siehe S. 94).
- Kugi, A. und D. Thull (2005). „Infinite-Dimensional Decoupling Control of the Tip Position and the Tip Angle of a Composite Piezoelectric Beam with Tip Mass“. In: *Control and observer design for nonlinear finite and infinite dimensional systems*. Hrsg. von T. Meurer u. a. Bd. 322. LNCIS. Berlin: Springer-Verlag, S. 351–368 (siehe S. 103).
- Luo, Z., B. Guo und O. Morgül (1999). *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. London: Springer-Verlag (siehe S. 85, 86, 89, 94, 98, 99, 102, 103).

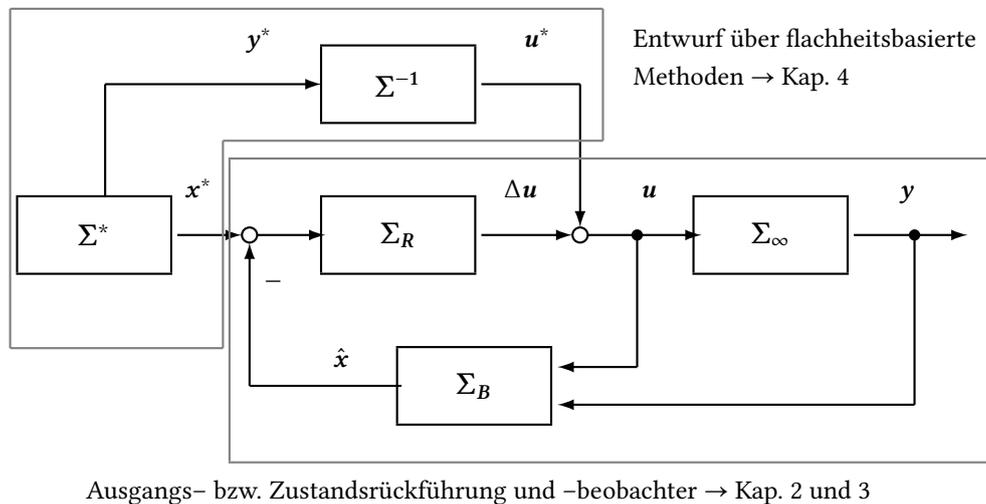
- Meglio, F. D., R. Vazquez und M. Krstic (2013). „Stabilization of a system of  $n+1$  coupled first-order hyperbolic linear PDEs with a single boundary input“. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 58.12, S. 3097–3111 (siehe S. 107).
- Meurer, T. (2013a). „On the extended Luenberger–type observer for semilinear distributed–parameter systems“. In: *IEEE T Autom. Contr* 58.7, S. 1732–1743 (siehe S. 107).
- Meurer, T. und A. Kugi (2008). „Zur Kombination von differenzieller Flachheit und Backstepping für die Trajektorienfolgeregelung eines Diffusions–Konvektions–Reaktionssystems“. In: *Ei Elektrotechnik Informationstechnik* 125.1/2, S. 2–11 (siehe S. 103, 107).
- (2009). „Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: combining backstepping and flatness“. In: *Automatica* 45.5, S. 1182–1194 (siehe S. 103, 107).
- Meurer, T. (2013b). *Control of Higher–Dimensional PDEs: Flatness and Backstepping Designs*. Communications and Control Engineering Series. Springer–Verlag (siehe S. 103, 107).
- (2013c). *Control of Higher–Dimensional PDEs: Flatness and Backstepping Designs*. Communications and Control Engineering Series. Springer–Verlag (siehe S. 103).
- Meurer, T. und A. Kugi (2011). „Tracking control design for a wave equation with dynamic boundary conditions modeling a piezoelectric stack actuator“. In: *Int. J. Robust Nonlin.* 21.5, S. 542–562 (siehe S. 103).
- Naylor, A. und G. Sell (1982). *Linear Operator Theory in Engineering and Science*. Bd. 40. Applied mathematical sciences. New York: Springer–Verlag (siehe S. 64, 66).
- Pritchard, A. und J. Zabczyk (1981). „Stability and stabilizability of infinite dimensional systems“. In: *SIAM Rev.* 23.1, S. 25–52 (siehe S. 93).
- Qi, J., R. Vazquez und M. Krstic (2015). „Multi–Agent deployment in 3–D via PDE control“. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 60.4, S. 891–906 (siehe S. 107).
- Rahn, C. (2001). *Mechatronic control of distributed noise and vibration – a Lyapunov approach*. Berlin: Springer–Verlag (siehe S. 94).
- Russell, D. (1967). „Nonharmonic fourier series in the control theory of distributed parameter systems“. In: *J. Math. Anal. Appl.* 18.3, S. 542–560 (siehe S. 78).
- (1978). „Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions“. In: *SIAM Rev.* 20.4, S. 639–739 (siehe S. 72).
- Shifman, J. (1993). „Lyapunov functions and the control of the Euler–Bernoulli beam“. In: *Internat. J. Control* 57.4, S. 971–990 (siehe S. 103).
- Showalter, R. (1994). *Hilbert space methods for partial differential equations*. Electron. J. Diff. Eqns. (siehe S. 66).
- Smyshlyaev, A., E. Cerpa und M. Krstic (2010). „Boundary stabilization of a 1–D wave equation with in–domain anti–damping“. In: *SIAM J. Control Optim.* 48.6, S. 4014–4031 (siehe S. 107).
- Smyshlyaev, A. und M. Krstic (2004). „Closed–Form boundary state feedbacks for a class of 1–D partial Integro–Differential equations“. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 49.12, S. 2185–2202 (siehe S. 103).
- (2005a). „Backstepping observers for a class of parabolic PDEs“. In: *Syst. Control Lett.* 54, S. 613–625 (siehe S. 106, 107).
- (2005b). „On control design for PDEs with space–dependent diffusivity or time–dependent reactivity“. In: *Automatica* 41, S. 1601–1608 (siehe S. 103).
- Tucsnak, M. und G. Weiss (2009). *Observation and control for operator semigroups*. Basel: Birkhäuser (siehe S. 61, 69).
- Vazquez, R. und M. Krstic (2008a). „Control of 1–D parabolic PDEs with volterra nonlinearities – part I: Design“. In: *Automatica* 44, S. 2778–2790 (siehe S. 103, 107).
- (2008b). „Control of 1–D parabolic PDEs with volterra nonlinearities – part II: Analysis“. In: *Automatica* 44, S. 2791–2803 (siehe S. 103, 107).
- (2016). „Explicit output–feedback boundary control of reaction–diffusion PDEs on arbitrary–dimensional balls“. In: *ESAIM COCV* 22.4, S. 1078–1096 (siehe S. 107).

# Kapitel 4

## Flachheitsbasierte Methoden

In den bisherigen Abschnitten wurden Methoden zur Systemanalyse und zur Stabilisierung verteilt-parametrischer Systeme mittels Ausgangs- bzw. Zustandsrückführung diskutiert. Darüber hinaus stellt sich bei vielen praktischen Problemen, beispielsweise in der Robotik oder Verfahrenstechnik, die Frage der Realisierung einer Trajektorienfolge. Zu deren Beantwortung hat sich bei nichtlinearen endlich-dimensionalen Systemen die Eigenschaft der **differenziellen Flachheit** als eine geeignete Basis zur Trajektorienplanung sowie zum systematischen Entwurf von Steuerungen und Folgeregelungen mit Beobachter erwiesen (Fliess, Lévine u. a., 1995). Aktuelle Arbeiten befassen sich insbesondere mit der Erweiterung der flachheitsbasierten Methoden auf verteilt-parametrische Systeme, wobei speziell die Trajektorienplanung und der Steuerungsentwurf im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen (siehe z.B. die Monographie Meurer, 2013a und dortige Referenzen).

Im Folgenden wird eine Einführung in die grundlegenden Konzepte der flachen Systeme und insbesondere deren Anwendung auf SVPn gegeben. Dies erfolgt vor dem Hintergrund der Übertragung des in Abbildung 4.1 gezeigten Blockdiagramms der Zwei-Freiheitsgrad Regelkreisstruktur mit flachheitsbasierter Trajektorienplanung und Vorsteuerung kombiniert mit Ausgangs- bzw. Zustandsrückführung mit -beobachter. Der Entwurf der stabilisierenden Rückführung kann dabei für lineare SVPn mit den in den vorangegangenen Kapiteln eingeführten Methoden erfolgen.



**Abb. 4.1:** Zwei-Freiheitsgrad-Struktur des Regelkreises mit flachheitsbasierter Trajektorienplanung  $\Sigma^*$ , Vorsteuerung  $\Sigma^{-1}$ , Zustandsregler  $\Sigma_R$ , Zustandsbeobachter  $\Sigma_B$  und verteilt-parametrischer Strecke  $\Sigma_\infty$ .

### 4.1 Flachheit endlich-dimensionalen nichtlinearer Systeme

Zur Illustration der Eigenschaften flacher Systeme und zur Motivation flachheitsbasierter Methoden wird im Folgenden zunächst eine Einführung anhand endlich-dimensionalen nichtlinearer Systeme gegeben. Diese dient als Ausgangspunkt für die Übertragung des flachheitsbasierten Entwurfes auf SVPn.

Flache Systeme wurden von M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon ab 1992 (Fliess, Lévine u. a., 1992; Fliess, Lévine u. a., 1995) zunächst in einem differenzial–algebraischen Rahmen eingeführt und 1999 (Fliess, Lévine u. a., 1999) in die differenzial–geometrische Betrachtungsweise nichtlinearer Systeme integriert. Der Begriff der Flachheit kann kurz gesagt als eine Verallgemeinerung des Begriffs der exakten Zustandslinearisierung durch statische Zustandsrückführung angesehen werden. Insbesondere erweist sich, wie im Weiteren gezeigt wird, die Eigenschaft der (differenziellen) Flachheit als äußerst nützlich zum Entwurf einer Vorsteuerung bzw. einer Regelung zur Trajektorienfolge im offenen bzw. geschlossenen Regelkreis für ein nichtlineares System. Hierzu werden Basisgrößen, die so genannten **flachen Ausgänge** gesucht, die das System dynamisch vollständig beschreiben. Formal ergibt sich hieraus die folgende Definition (Fliess, Lévine u. a., 1995; Rothfuß, 1997).

#### Definition 4.1: Flaches System

Ein nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad (4.1)$$

heißt **differenziell flach**, wenn es einen fiktiven Ausgang  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$  gibt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Die Ausgänge  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  lassen sich als Funktionen von  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  und einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen  $u_i^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, \alpha_i$  ausdrücken, d.h.

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_1^{(\alpha_1)}, \dots, u_m, \dots, u_m^{(\alpha_m)}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}). \quad (4.2)$$

- (ii) Die Zustände  $\mathbf{x}$  und Eingänge  $\mathbf{u}$  lassen sich als Funktionen der (fiktiven) Ausgänge  $y_i$  und einer endlichen Anzahl ihrer Zeitableitungen  $y_i^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, \beta_i$  darstellen, d. h.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_1(y_1, \dots, y_1^{(\beta_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\beta_m-1)}) = \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\beta-1)}) \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}_2(y_1, \dots, y_1^{(\beta_1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\beta_m)}) = \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\beta)}) \quad (4.3b)$$

- (iii) Die Komponenten von  $\mathbf{y}$  sind *differenziell unabhängig*, d. h. es existiert keine Dgl. der Form

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\gamma)}) = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Ist Bedingung (ii) erfüllt, so ist Bedingung (iii) äquivalent zu  $\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{u}$ . Wenn die fiktiven Ausgänge  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllen, so heißen diese **flache Ausgänge**.

Zusammenfassend sind nachfolgend einige wichtige Eigenschaften flacher nichtlinearer endlich–dimensionaler Systeme aufgeführt:

- Die Gleichungen (4.3) lassen sich für  $\mathbf{y}_R^{(k)} = \mathbf{0}$ ,  $k \geq 1$  auch zur Analyse des stationären Verhaltens  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$  des Systems (4.1) verwenden

$$\mathbf{x}_R = \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{y}_R, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_1(\mathbf{y}_R), \quad \mathbf{u}_R = \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{y}_R, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_2(\mathbf{y}_R).$$

- Ein flaches System hat keinen eindeutigen flachen Ausgang. Vielmehr können mehrere fiktive Ausgänge existieren, die die Bedingungen von Definition 4.1 erfüllen. Gibt es mehrere flache Ausgänge, so können sie ineinander umgerechnet werden, d. h. sind  $\mathbf{y}$  und  $\bar{\mathbf{y}}$  flache Ausgänge für (4.1), so gibt es Beziehungen der Form

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega}(\bar{\mathbf{y}}, \dot{\bar{\mathbf{y}}}, \dots, \bar{\mathbf{y}}^{(s)}) \iff \bar{\mathbf{y}} = \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(s)}). \quad (4.5)$$

- Für lineare Systeme sind Flachheit und Steuerbarkeit äquivalent.
- **Flachheitsbasierte Vorsteuerung:** Für  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t)$  kann man mit Hilfe von (4.3) die Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  bestimmt werden, die die Trajektorienfolge  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*(t)$  realisiert, ohne dabei die System–Dgl. (4.1) zu integrieren:

$$\mathbf{x}^*(t) = \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{y}^*(t), \dot{\mathbf{y}}^*(t), \dots, \mathbf{y}^{*(\beta-1)}(t)), \quad \mathbf{u}^*(t) = \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{y}^*(t), \dot{\mathbf{y}}^*(t), \dots, \mathbf{y}^{*(\beta+1)}(t)).$$

Die berechneten  $\mathbf{u}^*(t)$  und  $\mathbf{x}^*(t)$  können dazu benutzt werden, vorab Beschränkungen der Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen zu überprüfen. Außerdem dienen die Trajektorien  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t))$  als Referenz für eine Zustandsrückführung bzw. Ausgangsregelung.

- **Flachheitsbasierte Folgeregelung:** Da flache Systeme durch eine geeignete Zustandsrückführung exakt zustandslinearisierbar sind, können lineare Methoden zum Regelungsentwurf herangezogen werden. Die Zustandslinearisierung durch dynamische oder quasi-statische Zustandsrückführung kann verwendet werden, um beim Trajektorienfolgeproblem den Fehler  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)$  zu stabilisieren. Wird das System (4.1) durch eine Zustandsrückführung in Brunovský-Form überführt, so kann mit Hilfe der **Brunovský-Normalform** eine Eigenwert-Vorgabe für die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers  $e_i^{(k)}(t) = y_i^{(k)}(t) - y_i^{*(k)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, \kappa_i - 1$  vorgenommen werden. Für die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers

$$\mathbf{e} = \left[ e_1, \dot{e}_1, \dots, e_1^{(\kappa_1-1)}, \dots, e_m, \dot{e}_m, \dots, e_m^{(\kappa_m-1)} \right]^T$$

werden durch

$$v_i = y_i^{*(\kappa_i)}(t) - \sum_{k=0}^{\kappa_i-1} p_{i,k} \left( y_i^{(k)}(t) - y_i^{*(k)}(t) \right), \quad i = 1, \dots, m$$

und eine geeignete Wahl der Parameter  $p_{i,k}$ ,  $i = 1, \dots, m$  die Eigenwerte der Fehlerdynamik vorgegeben.

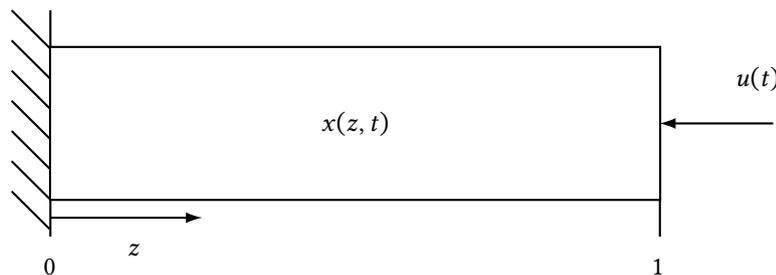
Offensichtlich weisen flache Systeme günstige Eigenschaften zur Lösung des Trajektorienfolge-Problems für nichtlineare endlich-dimensionale Systeme auf. Es stellt sich somit die Frage, ob eine Erweiterung bzw. Übertragung dieser Entwurfsmethodik auf verteilt-parametrische Systeme möglich ist. Dies ist Gegenstand der folgenden Abschnitte.

## 4.2 Flachheit parabolischer SVPn

Ein naheliegender Ansatz zur Übertragung der flachheitsbasierten Methode auf SVPn ist durch die Anwendung geeigneter Integraltransformationen, z.B. die der Laplace-Transformation, motiviert, wodurch eine Überführung der zugrundeliegenden PDgl. mit RBn und ABn in gewöhnliche Dgln. ermöglicht wird. Wie im Weiteren anhand einiger Beispiele gezeigt wird, erlaubt dies unter gewissen Annahmen die Einführung eines flachen Ausgangs.

### 4.2.1 Trajektorienplanung für die Wärmeleitungsgleichung

Für den dargestellten Wärmeleiter mit idealer Isolierung an  $z = 0$  und Temperaturvorgabe durch die externe Funktion  $u(t)$  an  $z = 1$



führt eine Energiebilanz unter der Annahme Fourierscher Wärmeleitung auf die lineare Wärmeleitungsgleichung in der Temperatur  $x(z, t)$ , d.h.

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0, \quad x(1, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (4.6b)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (4.6c)$$

In den weiteren Analyseschritten wird angenommen, dass alle Variablen in (4.6) dimensionslos sind, was durch eine entsprechende Normierung leicht erreicht werden kann. Für  $x_0(z) \equiv 0$  ergibt sich durch Anwendung der

Laplace-Transformation die örtliche Randwertaufgabe

$$\frac{d^2 X(z, s)}{dz^2} = \frac{s}{\lambda} X(z, s), \quad \text{mit} \quad \frac{dX}{dz}(0, s) = 0, \quad X(1, s) = U(s)$$

mit der Lösung

$$X(z, s) = G(z, s)U(s) \quad \text{mit} \quad G(z, s) = \frac{\cosh(\mu z)}{\cosh(\mu)} \tag{4.7}$$

mit  $\mu = \sqrt{\frac{s}{\lambda}}$ . Ausgehend von der Bestimmung der Übertragungsfunktion  $G(z, s)$  soll im Weiteren die Existenz eines flachen Ausgangs überprüft werden.


Zur Bestimmung der so ermittelten Zustands- und Eingangsparmetrierung im Zeitbereich wird die Reihenentwicklungen der cosh-Funktion herangezogen.


Die so erhaltene formale Parametrierung der Temperatur  $x(z, t)$  und des Eingangs  $u(t)$  durch den flachen Ausgang  $y(t) = x(0, t)$  und dessen Zeitableitungen bedingt den Nachweis der Konvergenz der Reihen durch eine geeignete Vorgabe von Trajektorien  $t \mapsto y^*(t)$  für den flachen Ausgang. Hierzu sind einige Vorbemerkungen notwendig:

(i) **Satz von Cauchy–Hadamard:** Für den Konvergenzradius  $\rho$  einer Potenzreihe  $\sum_n a_n z^n$  gilt

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty \\ \infty & \text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$  den größten Häufungspunkt der Folge  $|a_n|^{\frac{1}{n}}$  (Heuser, 1993).

(ii) **Stirling Formel:** Sei  $n \gg 1$ , dann gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

wobei  $a_n \sim b_n$  ausdrückt, dass das Verhältnis von  $a_n/b_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1 strebt, d.h. hier gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$

Des Weiteren wird der Begriff einer so genannten **Gevrey–Funktion** benötigt (Hua und Rodino, 1995; Fließ, Mounier u. a., 1997; Rudolph, 2003).

#### Definition 4.2: Gevrey Funktion

Eine Funktion  $y(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wird als **Gevrey–Funktion der Ordnung**  $\alpha$  bezeichnet, falls  $y(t) \in C^\infty(\Omega)$  und positive Konstanten  $M, R$  so existieren, dass

$$\sup_{t \in \Omega} |y^{(n)}(t)| \leq \frac{M}{R^n} (n!)^\alpha. \quad (4.8)$$

Mit diesen Anmerkungen gliedert sich der Konvergenznachweis wie folgt.



### Trajektorienplanung für den flachen Ausgang

Es ist leicht ersichtlich, dass die Anwendung dieser Methodik zum flachheitsbasierten Steuerungsentwurf auf der Planung geeigneter Trajektorien für den flachen Ausgang beruht. Speziell sind hier zwei Zielsetzungen zu unterscheiden:

- **Arbeitspunktwechsel:** Eine in der Praxis häufig vorkommende Steuerungs- oder Regelungsaufgabe betrifft die Realisierung eines Arbeitspunktwechsels in einem vorgegebenen Zeitintervall  $[0, T]$ . Für die Steuerung des Wärmeleiters (4.6) erfordert dies den Entwurf einer Steuerfunktion

$$u^*(t), t \in [0, T] : \quad x^*(z, 0) = x_0^*(z) \rightarrow x^*(z, T) = x_T^*(z). \quad (4.9)$$

Dabei wird angenommen, dass die Ortsprofile  $x_0^*(z)$ ,  $x_T^*(z)$  mit  $x_0^*(1) = u_0^*$  und  $x_T^*(1) = u_T^*$  Lösungen der (4.6) gehörenden stationären Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d^2 x_i^*}{dz^2} &= 0, & z \in (0, 1), i \in \{0, T\} \\ \frac{dx_i^*}{dz}(0) &= 0, \quad x_i^*(1) = u_i^* \end{aligned}$$

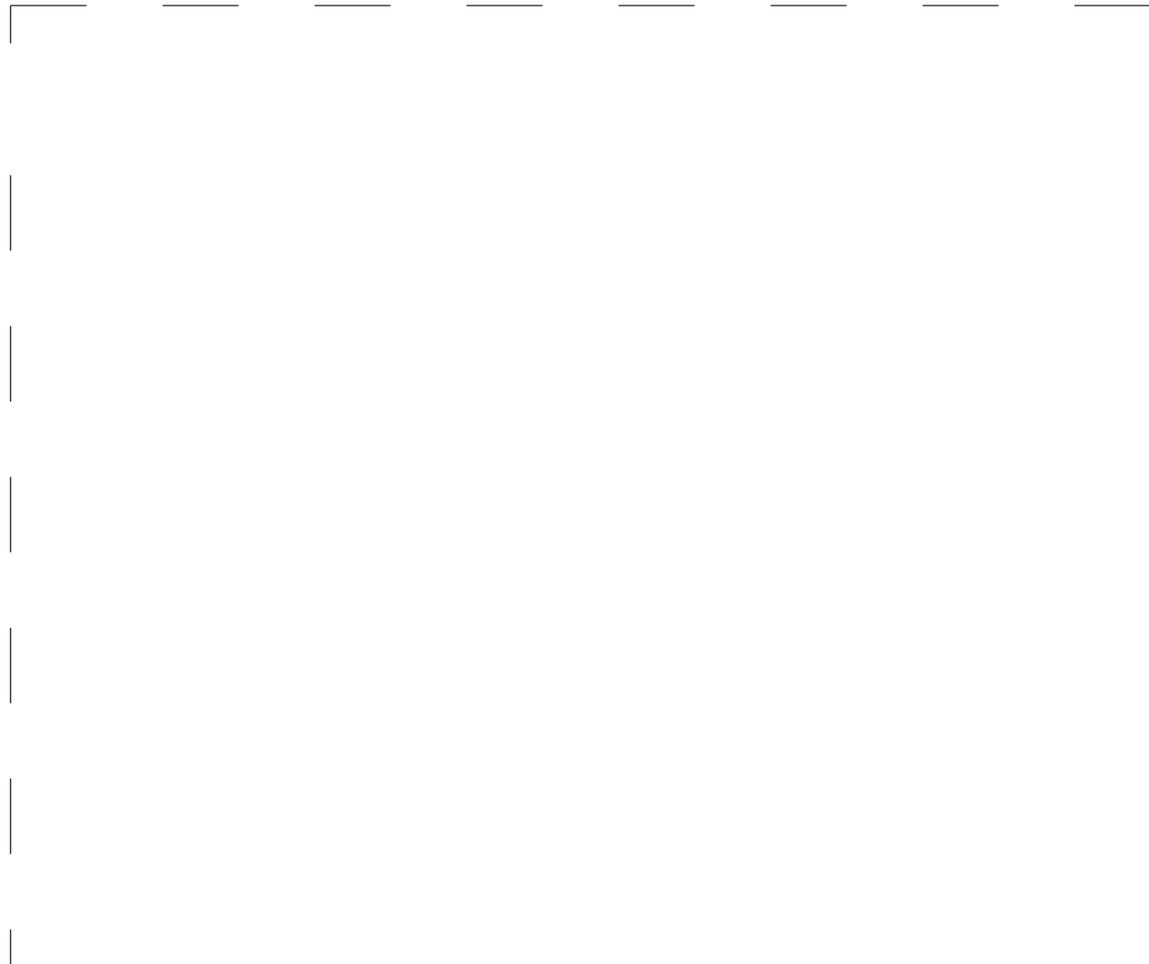
sind und die Anfangs- und Endwerte  $u_0^* = u^*(0)$  und  $u_T^* = u^*(T)$  der Steuerfunktion  $u^*(t)$  bekannt sind.

Der Arbeitspunktwechsel kann alternativ auch durch die entsprechenden Anfangs- und Endwerte der Regelgröße  $y$  vorgegeben sein. Die dann zu planende Solltrajektorie  $y^*(t)$  muss die beiden Randpunkte  $y_0^*$

und  $y_T^*$  in geeigneter Weise verbinden

$$\Sigma^* : y^*(t), t \in [0, T] : y^*(0) = y_0^* \rightarrow y^*(T) = y_T^* \quad \text{mit} \quad y^{*(i)}|_{0,T} = 0, \quad i > 0. \quad (4.10)$$

Die eigentliche Aufgabe des Steuerungsentwurfs betrifft die Planung der Solltrajektorie  $y^*(t)$  für den flachen Ausgang. Damit die in (\*\*\*) berechnete Steuerung  $u^*(t)$  realisierbar ist, muss die Solltrajektorie  $y^*(t)$  in dem Intervall  $[0, T]$  als eine  $C^\infty$ -Funktion angesetzt werden. Andererseits sind in den Randpunkten  $t = 0$  und  $t = T$  die Funktionswerte und alle Ableitungen der Trajektorie  $y^*(t)$  durch den Arbeitspunktwechsel (4.10) festgelegt. Dies bedeutet, dass **die zu planende Trajektorie in dem Intervall  $[0, T]$  unendlich oft differenzierbar sein muss, aber in den Randpunkten  $t = 0$  und  $t = T$  nicht analytisch ist.**



Aus diesem Grund wird wie in Fliess, Mounier u. a., 1997; Lynch und Rudolph, 2002 die Gevrey-Funktion

$$y^*(t) = y_0^* + (y_T^* - y_0^*)\Theta_{\omega,T}(t) \quad (4.11)$$

für den Arbeitspunktwechsel (4.10) benutzt. Hierbei werden eine „geglättete Sprungfunktion“

$$\Theta_{\omega,T}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t \geq T \\ \frac{\int_0^t \theta_{\omega,T}(\tau) d\tau}{\int_0^T \theta_{\omega,T}(\tau) d\tau}, & t \in (0, T) \end{cases} \quad (4.12)$$

zusammen mit einer „glockenförmigen Impulsfunktion“

$$\theta_{\omega,T}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (0, T) \\ \exp\left(-\left([1 - \frac{t}{T}] \frac{t}{T}\right)^{-\omega}\right), & t \in (0, T) \end{cases} \quad (4.13)$$

verwendet. Beide Funktionen sind Gevrey-Funktionen der Klasse  $\alpha = 1 + 1/\omega$  (Hua und Rodino, 1996; Lynch und Rudolph, 2002). Mit den Parametern  $\omega$  und  $T$  können die Steilheit der Trajektorie  $y^*(t)$  bzw.

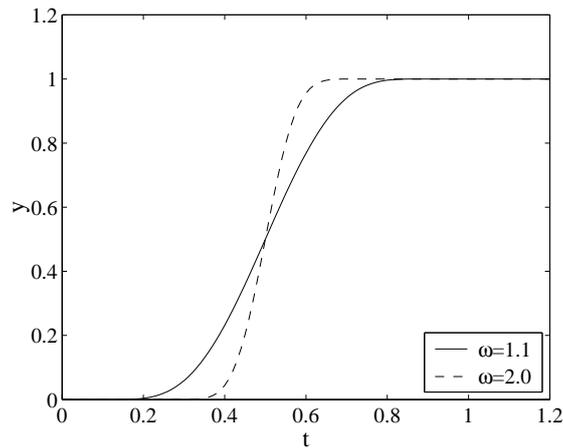


Abb. 4.2: Trajektorie  $y^*(t)$  nach (4.11)–(4.13) mit  $y_0 = 0$ ,  $y_T = 1$  und  $T = 1$  für  $\omega \in \{1.1, 2\}$ .

das Zeitintervall für den Arbeitspunktwechsel festgelegt werden. In Abbildung 4.2 ist der Verlauf der Solltrajektorie  $y^*(t)$  für zwei Werte des Parameters  $\omega$  dargestellt.

- **Übergang zwischen beliebigen Profilen:** Falls Anfangs- und Endprofil  $x_0(z)$  bzw.  $x_T(z)$  keine stationären Profile des Systems darstellen, ist die Planung einer geeigneten Trajektorie zur Realisierung des gewünschten Übergangs deutlich erschwert. Erste Ansätze zur Lösung dieses Problems werden in Laroche u. a., 2000; Dunbar u. a., 2003 vorgeschlagen. Diese beruhen im Wesentlichen auf der geeigneten Projektion des Anfangs- und Endprofils auf die Basis des zugrundeliegenden Funktionenraumes in Form von Potenzreihen.

### Simulationsergebnisse

Ausgehend von den obigen analytischen Ergebnissen werden im Folgenden einige numerische Resultate zur Trajektorienfolge im offenen Kreis für den Wärmeleiter mit Randeingriff (4.6) gezeigt. Hierzu wird die Steuerfunktion  $u^*(t)$  durch Einsetzen von  $y^*(t)$  aus (4.11) ermittelt, wobei zur numerischen Auswertung die ersten 20 Terme der entsprechenden Reihe herangezogen werden. Die numerischen Ergebnisse sind in Abbildung 4.3 für eine Gevrey-Ordnung  $\alpha = 2$  der Solltrajektorie  $y^*(t)$  dargestellt sowie in Abbildung 4.4 für  $\alpha = 1.5$ . Die Übergangszeit wurde zu  $T = 1$  gewählt. Die Diskretisierung und numerische Simulation der PDgl. (4.6) erfolgte hierbei unter Verwendung der MATLAB-Funktion `pdepe`. Offensichtlich entspricht einer Verringerung der Gevrey-Ordnung eine Erhöhung der Steigung der Solltrajektorie, was zu einer deutlich gesteigerten Stellamplitude führt.

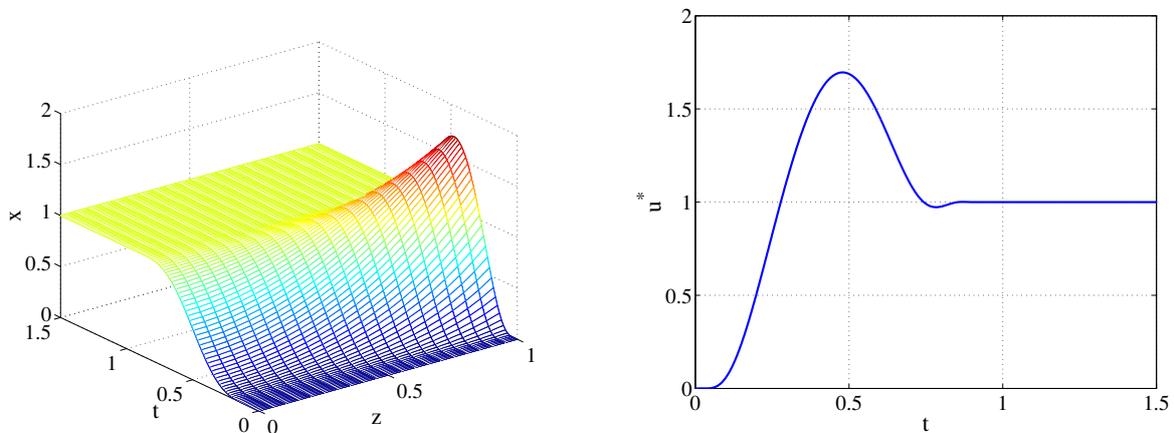
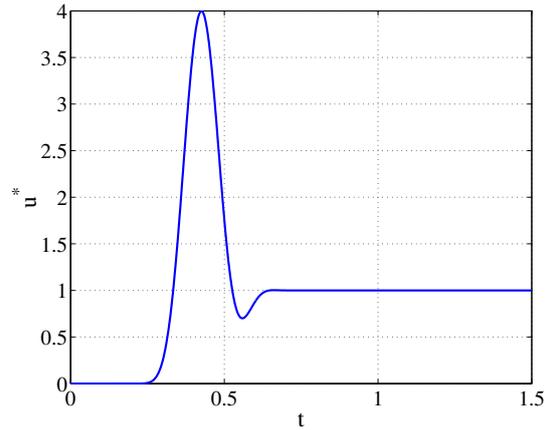
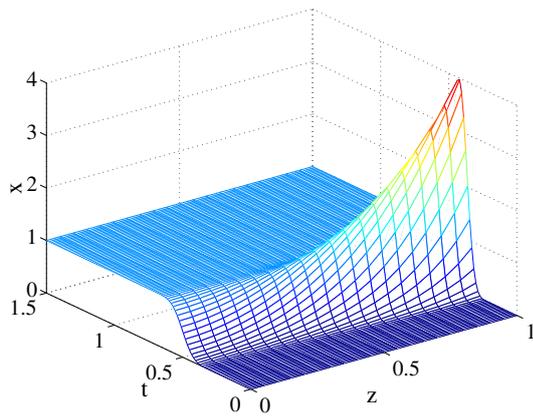


Abb. 4.3: Simulationsergebnis für die Randsteuerung des Wärmeleiters (4.6): Profile  $x(z, t)$  (links), Randsteuerung  $u^*(t)$  (rechts) für Gevrey Ordnung  $\alpha = 2$  und  $\lambda = 1$ .



**Abb. 4.4:** Simulationsergebnis für die Randsteuerung des Wärmeleiters (4.6): Profile  $x(z, t)$  (links), Randsteuerung  $u^*(t)$  (rechts) für Gevrey Ordnung  $\alpha = 1.5$  und  $\lambda = 1$ .

## 4.2.2 Trajektorienplanung für ein nichtlineares Diffusions–Reaktionssystem

Wie im obigen Abschnitt gezeigt wurde, kann für lineare SVPn durch die Anwendung der Laplace–Transformation eine flachheitsbasierte Parametrierung von Zuständen und Eingängen durch die Einführung eines flachen Ausgangs, bzw. einer so genannten Basisgröße, ermittelt werden. Hierbei wurden insbesondere zum Konvergenznachweis Potenzreihenentwicklungen der auftretenden hyperbolischen Funktionen herangezogen. Es stellt sich somit die Frage, ob nicht die direkte Anwendung von Potenzreihen weiterführende Ergebnisse liefern kann. Eine Antwort soll im Weiteren zunächst exemplarisch anhand des flachheitsbasierten Steuerungsentwurfs für ein nichtlineares Diffusions–Reaktionssystem gegeben werden.

Hierzu wird ein verteilt–parametrisches System mit quadratischen Quellterm in dem normierten Zustand  $x(z, t)$ , beispielsweise entsprechend einer Konzentration, betrachtet, wobei der Eingriff  $u(t)$  in das System am Rand  $z = 1$  erfolgen soll, d.h.

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \gamma x^2(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.14a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0, \quad x(1, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (4.14b)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (4.14c)$$

Vereinfachend wird angenommen, dass  $x_0(z)$  ein stationäres Profil des Systems beschreibt. Entsprechend den einleitenden Ausführungen wird der Zustand  $x(z, t)$  in Form einer Potenzreihe

$$x(z, t) \rightarrow \hat{x}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}_n(t) \frac{z^n}{n!} \quad (4.15)$$

angenommen, wobei die Koeffizienten  $\hat{x}_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  im Weiteren aus der Existenz eines flachen Ausgangs bestimmt werden sollen.

### Flacher Ausgang und Zustands– und Eingangsparametrierung

Die formale Substitution von (4.15) in (4.14) liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[ \frac{d\hat{x}_n(t)}{dt} - \lambda \hat{x}_{n+2}(t) - \gamma \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{x}_{n-j}(t) \hat{x}_j(t) \right]}_{\stackrel{\text{Cauchysche Produktformel}}{=} 0 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} = 0, \quad \forall z \in (0, 1)$$

Der Ausdruck **formal** bezeichnet hierbei die Tatsache, dass Differenziation, Quadratur und Vertauschung der Summationsreihenfolge die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe bedingen. Dementsprechend ergibt sich

die folgende Bedingung an die Reihenoeffizienten

$$\lambda \hat{x}_{n+2}(t) = \frac{d\hat{x}_n(t)}{dt} - \gamma \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{x}_{n-j}(t) \hat{x}_j(t). \quad (4.16)$$

Des Weiteren führt die Auswertung der RBn (4.14b) zu

$$\hat{x}_1(t) = 0 \quad (4.17)$$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{x}_n(t)}{n!}, \quad (4.18)$$

wobei insbesondere

$$\hat{x}(0, t) = \hat{x}_0(t) \quad (4.19)$$

gilt. Die dem weiteren Vorgehen zugrundeliegende Idee besteht darin, (4.16), (4.17), (4.19) als Rekursion bzw. Differenzialrekursion zu interpretieren, woraus eine Parametrierung der Reihenoeffizienten ableitbar wird. Hierzu wird eine weitere Größe  $y(t) = \hat{x}_0(t)$  eingeführt, womit sich die folgenden Ausdrücke ergeben

$$\begin{aligned} \lambda \hat{x}_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} - \gamma y^2(t) \\ \lambda \hat{x}_3(t) &= -\gamma \left[ \binom{1}{0} \hat{x}_1(t) y(t) + \binom{1}{1} y(t) \hat{x}_1(t) \right] = 0 \\ \lambda \hat{x}_4(t) &= \frac{d\hat{x}_2(t)}{dt} - \gamma \left[ \binom{2}{0} \hat{x}_2(t) \hat{x}_0(t) + \binom{2}{1} \hat{x}_1^2(t) + \binom{2}{2} \hat{x}_0(t) \hat{x}_2(t) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4\gamma y(t) \frac{dy(t)}{dt} + 2\gamma^2 y^3(t) \right) \\ \lambda \hat{x}_5(t) &= \dots = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Verallgemeinert liefert dies für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\begin{aligned} \hat{x}_{2n}(t) &= \varphi_{1,2n} \left( y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t) \right) \\ \hat{x}_{2n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich kann somit eine Parametrierung aller Koeffizienten  $\hat{x}_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , des formalen Potenzreihenansatzes (4.15) durch  $y(t)$  und dessen Zeitableitungen (bis zur Ordnung  $\infty$ ) ermittelt werden, d.h.

$$\hat{x}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1,2n} \left( y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t) \right) \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \varphi_1(z, y(t), \dot{y}(t), \dots) \quad (4.20)$$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1,2n} \left( y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t) \right) \frac{1}{(2n)!} = \varphi_2(y(t), \dot{y}(t), \dots). \quad (4.21)$$

In Analogie zu Definition 4.1 repräsentieren (4.20), (4.21) die Gleichungen des inversen Systems, so dass  $y(t)$  als flacher Ausgang bzw. Basisgröße bezeichnet werden kann.

Wie einleitend erwähnt, bedingen die obigen Ausführungen die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4.15) bzw. (4.20) mit einem Konvergenzradius  $\rho \geq 1$ . Entsprechend den Ergebnissen für den linearen Wärmeleiter in Abschnitt 4.2.1 kann das Konvergenzproblem wiederum auf ein Problem der Trajektorienplanung für den flachen Ausgang zurückgeführt werden.

### Konvergenznachweis und Trajektorienplanung

Für die parametrisierte Reihe (4.20) kann das folgende Resultat nachgewiesen werden.

#### Satz 4.1

Sei  $t \mapsto y(t)$  eine Gevrey-Funktion der Ordnung  $1 < \alpha \leq 2$ , dann konvergiert die Reihe (4.20) auf die Lösung

von (4.14) mit  $x(0, t) = y(t)$  für alle  $z \in [0, 1]$  falls

$$\frac{1}{R} + \frac{M|\gamma|}{2} \leq \lambda$$

erfüllt ist.

Der Nachweis dieses Satzes soll im Weiteren kurz skizziert werden. Hierzu wird mittels vollständiger Induktion gezeigt (vgl. Lynch und Rudolph, 2002), dass gilt

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\hat{x}_n^{(l)}(t)| \leq \frac{Mp^n ((n+l)!)^\alpha}{R^l (n!)^{\alpha-1}} \quad (4.22)$$

mit den positiven Konstanten  $M, R, p$ . Nach dem Satz von Cauchy–Hadamard ergibt sich für eine Reihe  $\hat{x}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}_n(t) z^n / n!$  deren Koeffizienten  $\hat{x}_n(t)/n!$  die Bedingung (4.22) erfüllen, der Konvergenzradius zu  $\rho = 1/p$ . Das weitere Vorgehen gliedert sich wie folgt:

- (i) Aus der Differenzialrekursion (4.16) für  $n \geq 0$  ergibt sich durch Index-Verschiebung und  $l$ -fache Zeitableitung der Ausdruck

$$\lambda \hat{x}_n^{(l)}(t) = \hat{x}_{n-2}^{(l+1)}(t) - \gamma \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} \hat{x}_{n-2-j}^{(r)}(t) \hat{x}_j^{(l-r)}(t), \quad n \geq 2.$$

- (ii) Mit (4.22) und den Lemmata

**Lemma 4.1**

$$\sum_n a_n^\varrho \leq \left( \sum_n a_n \right)^\varrho, \quad \varrho \geq 1, a_n \geq 0.$$

**Lemma 4.2**

$$\frac{i!j!(i+j+l+1)!}{(i+j+1)!} = \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (j+r)!(i+l-r)!, \quad i, j, l \geq 0.$$

aus Lynch und Rudolph, 2002 ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung die Abschätzung

$$|\hat{x}_n^{(l)}(t)| \leq \frac{Mp^n ((n+l)!)^\alpha}{R^l (n!)^{\alpha-1}} \underbrace{\frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{Rp^2} + \frac{M|\gamma|}{2p^2} \right)}_{= g(p)}.$$

Die Forderung  $g(p) = 1$  liefert

$$p = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{R} + \frac{M|\gamma|}{2} \right)},$$

weshalb sich ein Konvergenzradius  $\rho = 1/p > 1$  für

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{R} + \frac{M|\gamma|}{2} \right)} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{R} + \frac{M|\gamma|}{2} \leq \lambda$$

ergibt, womit der Satz nachgewiesen ist.

**Anmerkung 4.1**

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass, im Gegensatz zum linearen Beispiel aus Abschnitt 4.2.1, in diesem nichtlinearen Beispiel nur ein endlicher Konvergenzradius nachweisbar ist, der zudem von der gewählten Trajektorie über die Parameter  $M, R, \alpha$  sowie von den Systemparametern  $\lambda, \gamma$  abhängt. Des Weiteren zeigen numerische Ergebnisse, dass die Bedingung (4.22) oftmals zu restriktiv ist, was mit der Art der getroffenen Abschätzung (Beträge über Reihenoeffizienten) zu begründen ist.

## Simulationsergebnisse

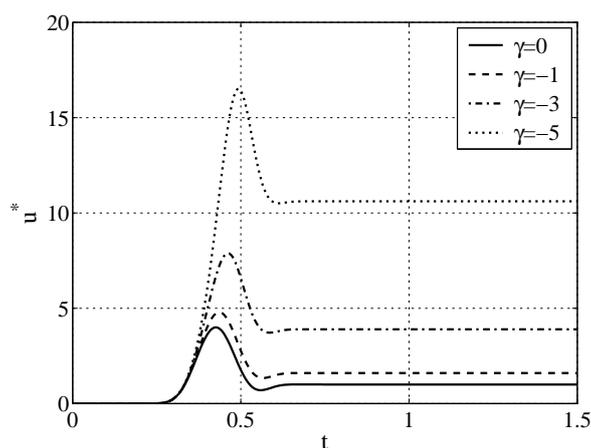


Abb. 4.5: Randsteuerung  $u^*(t)$  für  $\gamma \in \{0, -1, -3, -5\}$  für die Solltrajektorie (4.11) der Gevrey Ordnung  $\alpha = 2$  und  $\lambda = 1$ .

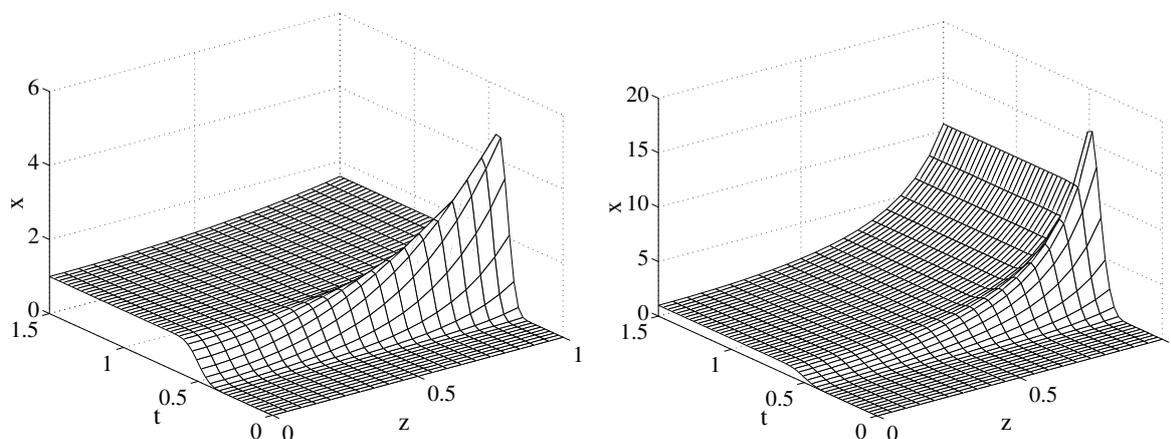


Abb. 4.6: Profile  $x(z, t)$  bei Randsteuerung des Diffusions-Reaktionssystems (4.14a) für die Gevrey Ordnung  $\alpha = 1.5$  und  $\lambda = 1$  mit  $\gamma = -1$  (links) und  $\gamma = -5$  (rechts).

Ausgehend von den obigen theoretischen Ergebnissen werden im Weiteren einige Simulationsergebnisse zur Trajektorienfolge im offenen Regelkreis präsentiert. Hierzu wird die verteilt-parametrische Strecke (4.14) in MATLAB unter Verwendung der Funktion `pdepe` approximiert. Die Randsteuerung  $u^*(t)$  wird aus der Parametrierung (4.21) und der Vorgabe der Gevrey-Funktion (4.11) mit  $T = 1$ ,  $\omega = 2$  (entsprechend  $\alpha = 3/2$ ),  $y_0^* = 0$  und  $y_T^* = 1$  als Solltrajektorie  $t \mapsto y^*(t)$  für den flachen Ausgang  $y(t) = x(0, t)$  ermittelt. Die entsprechenden Steuertrajektorien  $u^*(t)$  sind in Abbildung 4.5 für  $\gamma \in \{0, -1, -3, -5\}$  gezeigt. Die zugehörigen numerischen Ergebnisse für das Profil  $x(z, t)$  bei Anwendung der reinen Steuerung sind in Abbildung 4.6 für  $\gamma = -1$  (links) und  $\gamma = -5$  (rechts) dargestellt. Entsprechend der Systemdynamik erfordert die Erzielung des gewünschten Ausgangsverhaltens – im betrachteten Fall dem Übergang zwischen stationären Profilen – eine mit abnehmendem  $\gamma \leq 0$  wachsende Eingangsgröße  $u^*(t)$ . Wenn  $x(z, t)$  als (normierte) Konzentration aufgefasst wird, reagiert mehr des zugeführten Eduktes  $u^*(t)$  ab, womit dieser Verlauf leicht zu erklären ist. Für die quadratische Nichtlinearität existieren für jeden konstanten Eingang  $u_i^*$ ,  $i \in \{0, T\}$  bzw. konstanten Ausgang  $y_i^*$ ,  $i \in \{0, T\}$  zwei Ruhelagen, wobei in Abhängigkeit der Vorzeichen von  $\gamma$  und  $u_i^*$  bzw.  $y_i^*$  die Ruhelagen stabil oder instabil sein können.

### Anmerkung 4.2

Neben der Anwendung konvergenter Potenzreihen erlauben divergente Reihenparametrierungen eine deutliche Erweiterung des Anwendungsfeldes. Hierzu ist es jedoch notwendig geeignete Summierbarkeitsmethoden in den Entwurf zu integrieren, die die Summation einer divergenten oder langsam konvergierenden Reihe auf einen Grenzwert (im Sinne der verwendeten Methode) erlauben. Anwendungen dieses Ansatzes sind u.a. in Laroche u. a., 2000; Wagner u. a., 2004; Meurer und Zeitz, 2004a; Meurer und Zeitz, 2004b; Meurer und Zeitz, 2005; Meurer, 2005; Meurer und Zeitz, 2008; Meurer und Krstic, 2010; Meurer und Krstic, 2011; Meurer, 2011 zu finden.

### 4.3 Flachheit hyperbolischer SVPn

Wie in Kapitel 1.2 im Rahmen der Klassifizierung von PDgln. erläutert wurde, zeigen hyperbolische SVPn gewisse Wellenphänomene, d.h. Anregungen breiten sich mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit entlang der charakteristischen Richtungen aus. Da hierbei z.T. auch diskontinuierliche bzw. aufsteilende Lösungen zulässig sind, muss insbesondere der klassische Lösungsbegriff basierend auf der Differenzierbarkeit von Lösungsprofilen abgeschwächt werden. Dies hat des Weiteren auch gewisse Auswirkungen auf die Flachheitsanalyse:

- Die Flachheit nichtlinearer endlich-dimensionaler Systeme  $\dot{x} = f(x, u)$  beruht auf der differentiellen Parametrierung des Zustands  $x(t)$  und des Eingangs  $u(t)$  durch den flachen Ausgang und dessen Zeitableitungen. Aus Def. 4.1 folgt die Forderung, dass jede Trajektorie für den flachen Ausgang aus  $C^{\beta+1}$  zu wählen ist. Eine Lösung  $x(t)$  ist entsprechend mindestens einfach stetig differenzierbar.
- Die Flachheit bzw. Parametrierbarkeit nichtlinearer parabolischer verteilt-parametrischer Systeme mit Randeingriff beruht ebenfalls auf der differentiellen Parametrierung des Zustandes  $x(z, t)$  und des Eingangs  $u(t)$  durch den flachen Ausgang bzw. die Basisgröße  $y(t) \in C^\infty$ , d.h. jede Trajektorie für den flachen Ausgang muss notwendigerweise glatt sein. Eine Lösung  $x(z, t)$  ist entsprechend der Ordnung der zeitlichen und örtlichen Differenziationsoperatoren hinreichend oft stetig differenzierbar.

Für hyperbolische SVPn ist der Ansatz einer differentiellen Parametrierung im Allgemeinen **nicht** zulässig, was im Weiteren anhand der verschiedenen Lösungsbegriffe kurz motiviert werden soll. Hierzu wird das Anfangswertproblem für eine nichtlineare Erhaltungsgleichung der Form

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x(z, t))}{\partial z} = 0, \quad z \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.23)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (4.24)$$

mit dem Zustandsvektor  $x = [x_1, \dots, x_N]^T$  und der so genannten Flussfunktion  $f = [f_1, \dots, f_N]^T$  untersucht. Das System von PDgln. (4.23) wird als hyperbolisch bezeichnet, wenn die Jacobi-Matrix  $\partial f / \partial x$  rein reelle, paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt und ein vollständiges System linear unabhängiger Eigenvektoren existiert. Eine Lösung  $x(z, t)$  wird **klassisch** genannt, wenn  $x(z, t)$  einfach stetig differenzierbar ist bzgl.  $t$  und  $z$  und (4.23), (4.24) zumindest punktweise für alle  $(z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  erfüllt. Die Begriffe der **schwachen Lösung** und **Entropielösung** werden im Folgenden anhand zweier Beispiele erläutert.

- Es seien  $x(z, t) = x(z, t)$ ,  $f(x(z, t)) = vx(z, t)$  mit konstantem  $v$  und  $x_0(z) = x_0(z)$ . In diesem Fall repräsentiert (4.23), (4.24) die lineare Transportgleichung. Deren Lösung kann beispielsweise mittels des Charakteristikenverfahrens zu  $x(z, t) = x_0(z - vt)$  bestimmt werden. Falls  $x_0(z) \in C^0$ , ist folglich  $x(z, t) \in C^0$ . Gilt darüber hinaus, dass  $x_0(z)$  unstetig ist, folgt unmittelbar die Unstetigkeit von  $x(z, t)$ , weshalb der klassische Lösungsbegriff im Allgemeinen nicht angewendet werden kann.
- Es seien  $x(z, t) = x(z, t)$ ,  $f(x(z, t)) = x^2(z, t)/2$  und  $x_0(z) = x_0(z)$ . In diesem Fall repräsentiert (4.23), (4.24) die so genannte nicht-viskose Burger-Gleichung, die direkt in der Form

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + x \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = 0, \quad z \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.25)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (4.26)$$

angegeben werden kann. Die Lösung der Burger-Gleichung kann über das totale Differenzial ermittelt werden, da wegen

$$dx(z, t) = \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz$$

gilt, dass

$$\frac{dx(z, t)}{dt} = \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

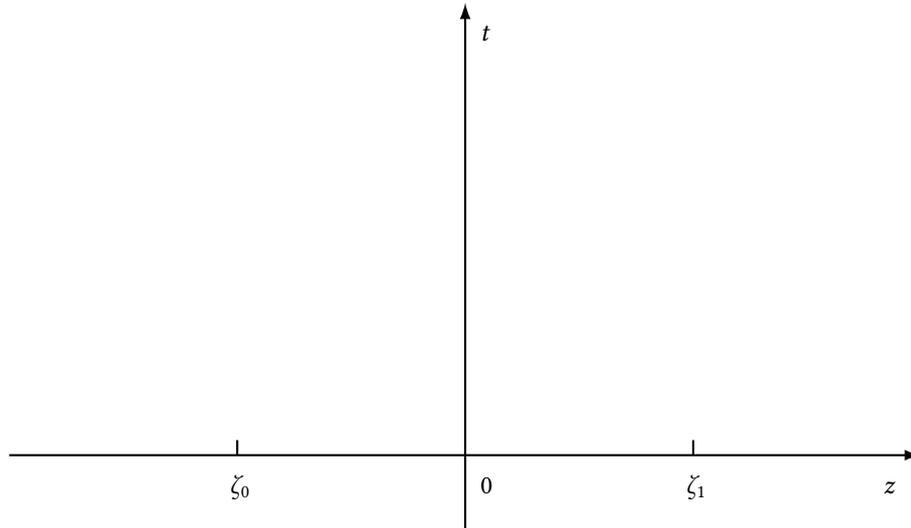
womit sich durch Vergleich mit (4.25) ergibt, dass

$$\frac{dx(z, t)}{dt} = 0 \quad \text{entlang der Kurven} \quad \frac{dz}{dt} = x(z, t), \quad z(0) = \zeta.$$

Mit anderen Worten, die Lösung ist konstant  $x(z, t) = x_0(\zeta)$  entlang der Charakteristiken  $z = \zeta + x_0(\zeta)t$ . Die Lösung kann somit implizit als

$$\begin{cases} x(z, t) = x_0(\zeta(z, t)) \\ \zeta(z, t) = z - x_0(\zeta(z, t))t \end{cases}$$

angegeben werden. In der  $(z, t)$ -Ebene ergibt sich somit das folgende Bild.



Aus der im Allgemeinen auftretenden Mehrdeutigkeit kann beispielsweise durch die Einführung des Entropiebegriffs die physikalisch sinnvolle Lösung extrahiert werden (Godlewski und Raviart, 1996).

Als Fazit dieser exemplarischen Analyse ergibt sich, dass die Differenzierbarkeit der Lösung einer hyperbolischen PDgln. **nicht** mehr vorausgesetzt werden kann, womit der für parabolische PDgln. erfolgreich verfolgte Weg der **differenziellen Parametrierung nicht mehr unmittelbar übertragbar** ist. Die somit notwendigen neuen Ansätze basieren im Wesentlichen auf der Anwendung des Charakteristikenverfahrens (für lineare und gewisse nichtlineare PDgln.) und der Operatorenmethoden (für lineare PDgln). Diese werden im Folgenden anhand geeigneter Beispiele illustriert.

### 4.3.1 Trajektorienplanung für die lineare Transportgleichung

Die Gesamtlösung der linearen Transportgleichung

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = 0, \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.27a)$$

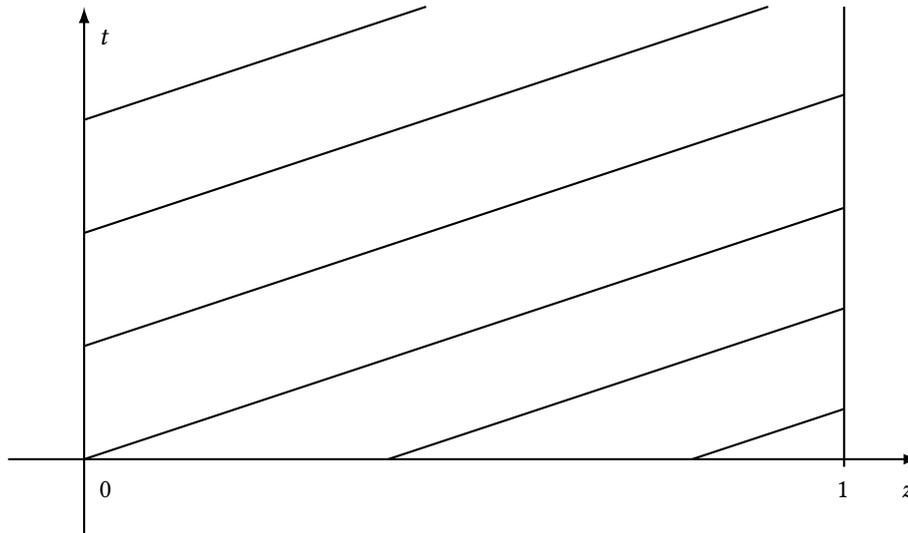
$$x(0, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (4.27b)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (4.27c)$$

mit inhomogener Randbedingung  $u(t)$ , die im Weiteren als Eingangsgröße aufgefasst wird, ergibt sich zu

$$x(z, t) = u\left(t - \frac{z}{v}\right)\sigma\left(t - \frac{z}{v}\right) + x_0(z - vt)\sigma(z - vt), \quad (4.28)$$

wobei  $\sigma(\cdot)$  die Heaviside Funktion bezeichnet. Die Lösung (4.28) kann hierbei durch die Anwendung des Charakteristikenverfahrens oder der Laplace-Transformation ermittelt werden. Die Charakteristiken folgen aus  $dz/dt = v$ ,  $z(0) = \zeta$ , so dass sich in der  $(t, z)$ -Ebene das folgende Bild ergibt.



Aus (4.28) folgt offensichtlich, dass gilt

$$x(z, t) = \begin{cases} x_0(z - vt)\sigma(z - vt), & t < \frac{z}{v} \\ u\left(t - \frac{z}{v}\right)\sigma\left(t - \frac{z}{v}\right), & t \geq \frac{z}{v} \end{cases} \quad (4.29)$$

womit unmittelbar ersichtlich wird, dass die Anfangsbedingungen  $x_0(z)$  **nicht** durch einen Randeingriff beeinflusst werden können.

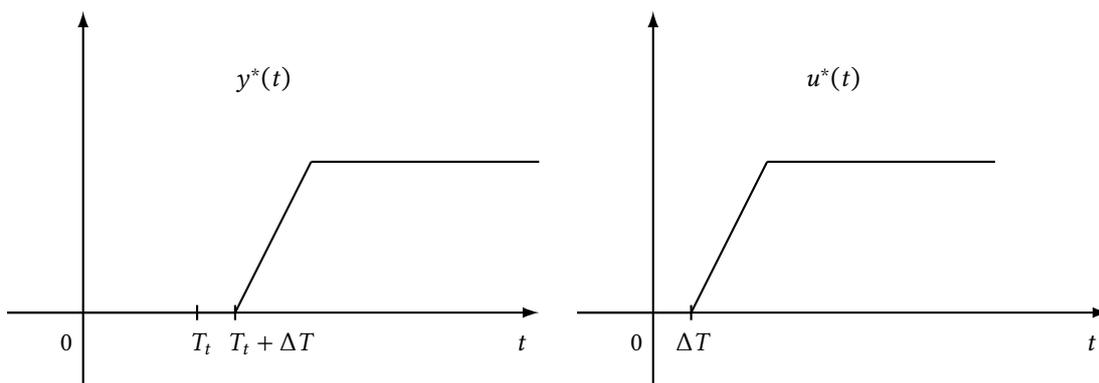
Andererseits kann für  $t \geq z/v$  direkt eine Trajektorienfolge im offenen Regelkreis ermittelt werden. Sei  $y(t) = x(\bar{z}, t)$  mit  $\bar{z} \in (0, 1]$ . Dann gilt wegen (4.29), dass

$$u\left(t - \frac{\bar{z}}{v}\right) = y(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = y\left(t + \frac{\bar{z}}{v}\right),$$

wobei der letzte Schritt aus einer Zeitverschiebung folgt. Dementsprechend ergibt sich

$$x(z, t) = y\left(t + \frac{\bar{z} - z}{v}\right),$$

womit die Gleichungen des **inversen Systems** in Abhängigkeit vom flachen Ausgang  $y(t)$  und dessen verzögerten bzw. voreilenden Argument. Es ist somit leicht einsichtig, dass die Trajektorienplanung die Zeitverzögerung



**Abb. 4.7:** Trajektorienplanung für die lineare Transportgleichung.

$T_t = \bar{z}/v$ , entsprechend der Wellengeschwindigkeit, berücksichtigen muss. Des Weiteren wird im Gegensatz zu den Ergebnissen für parabolische SVPn keine Forderung an die Differenzierbarkeit von Solltrajektorien  $t \mapsto y^*(t)$  für den flachen Ausgang  $y(t)$  gestellt. Folglich ergibt sich das in Abbildung 4.7 dargestellte Schema der Trajektorienplanung. Dieses Beispiel zeigt, dass aus der Kenntnis der exakten Lösung direkt die notwendige Steuerung ermittelt werden kann, um eine vorgegebene Trajektorie für den flachen Ausgang im offenen Kreis zu realisieren.

### 4.3.2 Trajektorienplanung für die quasilineare Burger–Gleichung

Nachdem einführend die nicht-viskose Burger–Gleichung dazu genutzt wurde, den Begriff der schwachen Lösung für hyperbolische PDgln. zu motivieren, soll im Weiteren der Entwurf einer Steuerung zur Trajektorienfolge im offenen Regelkreis für dieses nichtlineare bzw. quasilineare Beispiel illustriert werden. Die entsprechende PDgl. ergibt sich zu

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + x(z, t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = 0, \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (4.30a)$$

$$x(0, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (4.30b)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (4.30c)$$

Mittels des Charakteristikenverfahrens kann direkt die Lösung

$$x(z, t) = x_0(z - t x(z, t)) \sigma(z - t x(z, t)) + u \left( t - \frac{z}{x(z, t)} \right) \sigma \left( t - \frac{z}{x(z, t)} \right) \quad (4.31)$$

ermittelt werden. Diese gilt jedoch nur für  $t < t_B$  mit  $t_B$  dem Zeitpunkt des ersten Schnittpunkts zweier Charakteristiken. Zu diesem Zeitpunkt entsteht ein so genannter Schock, weshalb die Lösung für  $t \geq t_B$  mit so genannten “Shock–Fitting”–Methoden fortgesetzt werden muss. Des Weiteren zeigt sich, dass wiederum der Einfluss der Anfangsbedingung  $x_0(z)$  nicht durch einen Randeingriff kompensiert werden kann, so dass im Folgenden  $x_0(z) \equiv 0$  angenommen wird.

Sei  $y(t) = x(\bar{z}, t)$ ,  $\bar{z} \in (0, 1]$ , dann gilt für  $t \geq \bar{z}/y(t)$ , dass

$$u \left( t - \frac{\bar{z}}{y(t)} \right) = y(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = y \left( t + \frac{\bar{z}}{y(t)} \right),$$

wobei die letzte Folgerung eine Zeitverschiebung beinhaltet. Neben der Eingangsparmetrierung durch  $y(t)$  kann leicht aus (4.31) die Zustandsparametrierung als

$$x(z, t) = y \left( t + \frac{\bar{z}}{y(t)} - \frac{z}{x(z, t)} \right)$$

bestimmt werden. Diese Gleichungen des **inversen Systems** zeigen unmittelbar, dass die Trajektorienplanung  $t \mapsto y^*(t)$  die von der Solltrajektorie abhängige Zeitverzögerung  $T_t(y^*(t)) = \bar{z}/y^*(t)$  berücksichtigen muss. Insbesondere sind keine Nulldurchgänge von  $y^*(t)$  zulässig. Für den Fall  $y^*(t) > 0$  mit  $y_{\min}^* \leq y^*(t) \leq y_{\max}^*$  für  $t \in \mathbb{R}^+$  ergibt sich, dass

$$\frac{\bar{z}}{y_{\max}^*} \leq \frac{\bar{z}}{y(t)} \leq \frac{\bar{z}}{y_{\min}^*},$$

womit sich die in der Trajektorienplanung zu berücksichtigende maximale Zeitverzögerung zu  $T_t^{\max} = \bar{z}/y_{\min}^*$  ergibt. Ein entsprechendes Ergebnis ergibt sich für den Fall  $y^*(t) < 0$ . Des Weiteren sei bemerkt, dass keine Differenzierbarkeitsanforderung an die Solltrajektorie  $y^*(t)$  gestellt wird.

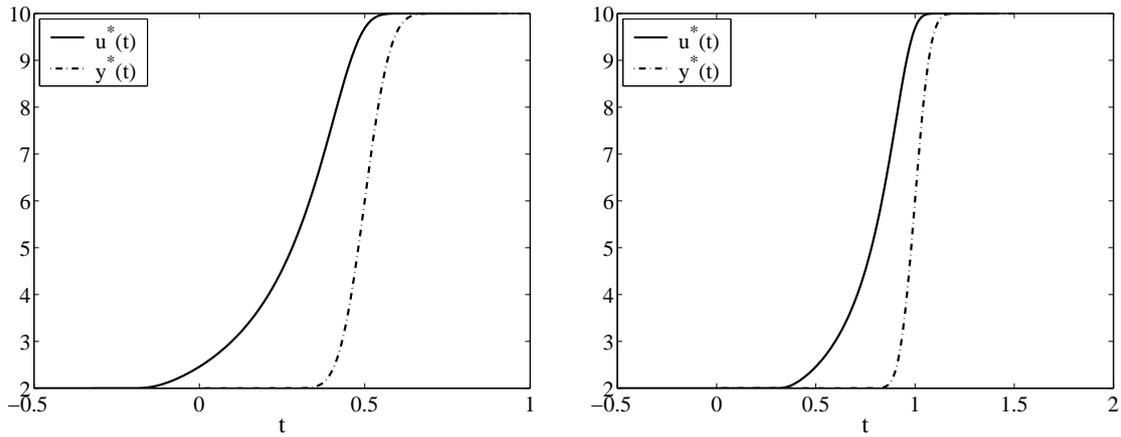
Ein numerisches Beispiel zeigt Abbildung 4.8. Hierbei wurde für  $\bar{z} = 1$  die Solltrajektorie zu

$$y^*(t) = y_{\min}^* + (y_{\max}^* - y_{\min}^*) \Theta_{\omega, T}(t - t_0) \quad (4.32)$$

gewählt, wobei  $y_{\min}^* = 2$ ,  $y_{\max}^* = 10$  und  $\Theta_{\omega, T}(\cdot)$  aus (4.12) mit  $T = 1$ ,  $\omega = 2$ . Für  $t_0 = 0$  in Abbildung 4.8 (links) ergibt sich ein akausales Verhalten, da die Steuerung zu negativen Zeiten  $t < 0$  aufgeprägt werden muss. Wegen  $T_t^{\max} = 1/2$  ergibt sich für  $t_0 \geq T_t^{\max}$  ein kausaler Verlauf, der in Abbildung 4.8 (rechts) für  $t_0 = T_t^{\max}$  dargestellt ist. Insbesondere ist im Eingangs-/Ausgangsverhalten das für die nicht-viskose Burger–Gleichung charakteristische Aufsteilen der Lösung zu beobachten, da die Steigung von  $u^*(t)$  immer kleiner ist als die von  $y^*(t)$ .

### 4.3.3 Trajektorienplanung für die lineare Wellengleichung

Wie einleitend erwähnt, können für hyperbolische lineare PDgln. neben dem Charakteristikenverfahren auch Operatorenmethoden angewandt werden. Dies soll im Folgenden anhand des flachheitsbasierten Entwurfs einer



**Abb. 4.8:** Steuerung  $u^*(t)$  und Solltrajektorie  $y^*(t)$  gemäß (4.32) für die nicht-viskose Burger-Gleichung mit  $\bar{z} = 1$ . Links: akausales Verhalten bei Vernachlässigung der maximalen Zeitverschiebung  $T_t^{\max} = 1/2$ ; rechts: kausaler Verlauf bei Berücksichtigung der maximalen Zeitverschiebung  $T_t^{\max} = 1/2$ .

Randsteuerung für die lineare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (4.33a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = u(t), \quad \frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.33b)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z) \quad z \in [0, 1]. \quad (4.33c)$$

mit homogenen Anfangsbedingungen demonstriert werden. Hierbei bezeichnet  $c$  die Phasengeschwindigkeit. Durch Anwendung der Laplace-Transformation kann das SVP (4.33) in ein Randwertproblem überführt werden, dessen Lösung sich im Bildbereich der Laplace-Transformation zu

$$X(z, s) = -\frac{c \cosh(\mu(s)(1-z))}{s \sinh \mu(s)} U(s), \quad (4.34)$$

mit  $\mu(s) = s/c$  ergibt. Analog zum Vorgehen in den Abschnitten 4.2.1 und 4.4 kann ein flacher Ausgang gemäß

$$X(z, s) = \cosh(\mu(s)(1-z)) Y(s) \quad (4.35)$$

$$U(s) = -\frac{s}{c} \sinh(\mu(s)) Y(s) \quad (4.36)$$

mit  $Y(s) = X(1, s)$  eingeführt werden. Diese Gleichungen des **inversen Systems** können direkt unter Verwendung des Verschiebungssatzes in den Zeitbereich überführt werden, wobei sich

$$x(z, t) = \frac{1}{2} \left[ y \left( t + \frac{1-z}{c} \right) \sigma \left( t + \frac{1-z}{c} \right) + y \left( t - \frac{1-z}{c} \right) \sigma \left( t - \frac{1-z}{c} \right) \right], \quad (4.37)$$

$$u(t) = -\frac{1}{2c} \left[ \dot{y} \left( t + \frac{1}{c} \right) \sigma \left( t + \frac{1}{c} \right) - \dot{y} \left( t - \frac{1}{c} \right) \sigma \left( t - \frac{1}{c} \right) \right], \quad (4.38)$$

ergibt. Die hierbei auftretenden verzögerten und voreilenden Argumente müssen insbesondere in der Trajektorienplanung  $t \mapsto y^*(t)$  für den flachen Ausgang  $y^*(t)$  berücksichtigt werden. Des Weiteren sei bemerkt, dass es ausreichend ist, stetige Trajektorien  $y^*(t) \in C^0$  vorzugeben, so dass sich aus (4.38) ein diskontinuierlicher Verlauf der Stellgröße  $u^*(t)$  ergibt.

Dies wird im Folgenden exemplarisch anhand der in Abbildung 4.9 dargestellten Solltrajektorie  $y^*(t)$  in Form eines dreiecksförmigen Impulses der Breite  $2a$  erläutert. Aus Kausalitätsgründen muss  $y^*(t \leq 1/c) = 0$  sein. Die entsprechende diskontinuierliche Steuerung  $u^*(t)$  zeigt Abbildung 4.10 für eine Pulsweite der Solltrajektorie  $2a < 2/c$  (oben) sowie  $2a > 2/c$  (unten). Den Effekt der Randsteuerung  $u^*(t)$  auf die Wellengleichung (4.33) zeigt Abbildung 4.11 in der  $(z, t, x(z, t))$ -Ebene. Durch den ersten Term der Steuerung (4.38),

$$u_{(1)}^*(t) = -\frac{1}{2c} \dot{y} \left( t + \frac{1}{c} \right) \sigma \left( t + \frac{1}{c} \right) \quad (4.39)$$

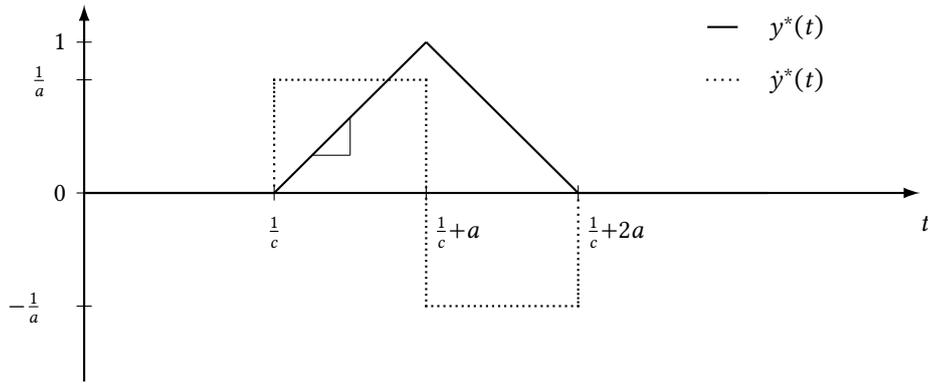


Abb. 4.9: Dreieckförmige Solltrajektorie  $y^*(t)$  und deren Zeitableitung  $\dot{y}^*(t)$ .

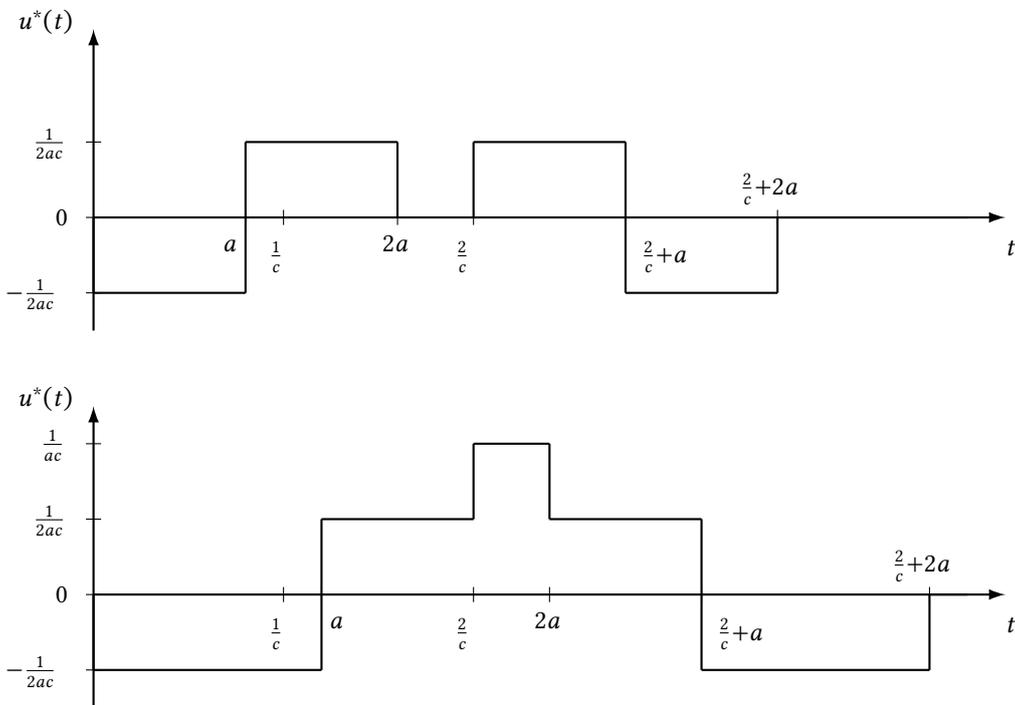


Abb. 4.10: Steuerung  $u^*(t)$  für die dreieckförmige Solltrajektorie  $y^*(t)$  aus Abbildung 4.9 für  $a < 1/c$  (oben) und  $a > 1/c$  (unten).

wird ein dreiecksförmiger Impuls erzeugt, der entlang der Charakteristiken zum rechten Ende an  $z = 1$  propagiert, wobei das erste Signal zum Zeitpunkt  $t^* = 1/c$  eintrifft. Aufgrund der Reflexion am freien Ende durchläuft ein Bild des Anfangsimpulses die  $(z, t)$ -Ebene um zum Zeitpunkt  $t^{**} = 2/c$  das linke Ende  $z = 0$  zu erreichen. Dieser Wellenanteil superponiert mit dem durch die Steuerung  $u^*(t)$  eingprägten Anteil

$$u_{(2)}^*(t) = \frac{1}{2c} \dot{y} \left( t - \frac{1}{c} \right) \sigma \left( t - \frac{1}{c} \right), \quad (4.40)$$

weshalb sich die beiden Wellen gegenseitig auslöschen.

Zusammenfassend sei betont, dass die Trajektorienplanung die Wellenlaufzeit berücksichtigen muss, die, wie in Abbildung 4.11 gezeigt und in Beispiel 3.14 theoretisch nachgewiesen wurde, einer Mindeststeuerzeit entspricht. Diese Effekte sind wie exemplarisch illustriert charakteristisch für hyperbolische SVPn.

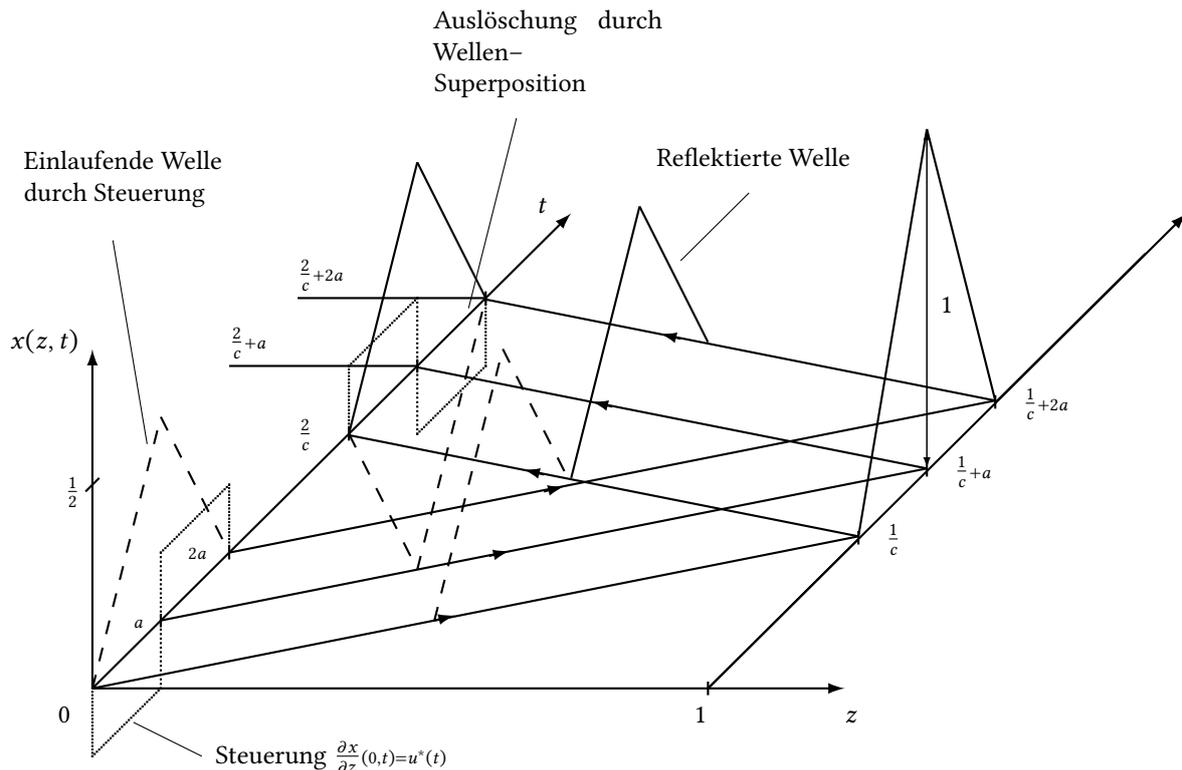


Abb. 4.11: Randsteuerung für die Wellengleichung (4.33) zur Realisierung der Trajektorienfolge  $x(1, t) = y(t) \rightarrow y^*(t)$  mit  $y^*(t)$  aus Abbildung 4.9 und Pulsweite  $a < 1/c$ .

#### 4.4 Flachheit biharmonischer SVPn

Für PDgl. der Ordnung größer zwei in den örtlichen Ableitungen kann zumindest für lineare Systeme der Flachheitsbegriff durch die Anwendung von Operatorenmethoden, wie beispielsweise der Laplace-Transformation, erweitert werden. Das prinzipielle Vorgehen wird im Folgenden exemplarisch anhand des in Abbildung 4.12 schematisch dargestellten Beispiels eines Euler-Bernoulli Biegebalkens mit am freien Rand angreifenden Moment als Stellgröße illustriert (vgl. Beispiel 1.2).

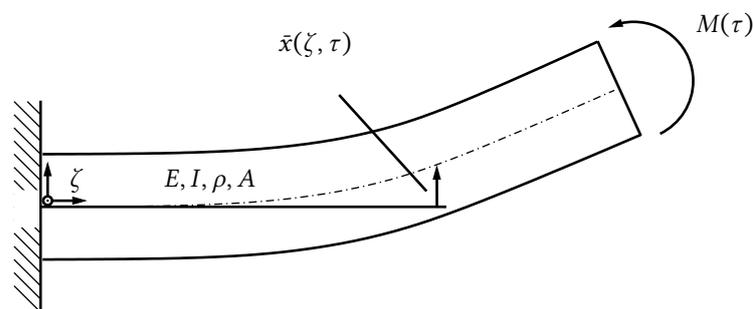


Abb. 4.12: Schematische Darstellung des Biegebalkens mit Auslenkung  $\bar{x}(\zeta, \tau)$  und externen Moment  $M(\tau)$ .

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich in normierter Form zu

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} = 0, \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.41a)$$

$$x(0, t) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.41b)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(1, t) = u(t), \quad \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.41c)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \frac{\partial x}{\partial t}(z, 0) = x_1(z), \quad z \in [0, 1] \quad (4.41d)$$

wobei  $z = \zeta/L$ ,  $t = \tau/L^2 \sqrt{EI/(A\rho)}$ ,  $x(z, t) = \bar{x}(\zeta(z), \tau(t))$  und  $u(t) = -M(\tau(t))L^2/(EI)$  mit Elastizitätsmodul  $E$ , Flächenträgheitsmoment  $I$ , Querschnittsfläche  $A$ , Dichte  $\rho$  und Balkenlänge  $L$ . Im Folgenden wird  $x_0(z) \equiv 0 \equiv x_1(z)$  angenommen, d.h. der Balken ist zum Zeitpunkt  $t = 0$  unangelenkt und in Ruhe.

#### 4.4.1 Flacher Ausgang und Zustands- und Eingangsparametrierung

Die Anwendung der Laplace-Transformation mit  $X(z, s) \leftrightarrow x(z, t)$  und  $U(s) \leftrightarrow u(t)$  liefert die Randwertaufgabe

$$\frac{d^4 X(z, s)}{dz^4} + s^2 X(z, s) = 0, \quad z \in (0, 1)$$

$$X(0, s) = 0, \quad \frac{dX}{dz}(0, s) = 0$$

$$\frac{d^2 X}{dz^2}(1, s) = U(s), \quad \frac{d^3 X}{dz^3}(1, s) = 0,$$

deren Lösung durch die Substitution  $\mu^4(s) = -s^2$  leicht zu

$$X(z, s) = \frac{-\cos(\mu(s)(1-z)) + \cos(\mu(s)L) \cosh(\mu(s)z) + \cosh(\mu(s))(-\cos(\mu(s)z) + \cosh(\mu(s)z)) + \sin(\mu(s)z) \sinh(\mu(s)) + (\sin(\mu(s)) - \sinh(\mu(s))) \sinh(\mu(s)z)}{2\mu^2(s)[1 + \cos(\mu(s)) \cosh(\mu(s))]} U(s)$$

ermittelt werden kann. Analog zum Vorgehen für den linearen Wärmeleiter in Abschnitt 4.2.1 können die Gleichungen des entsprechenden **inversen Systems** durch das Einführen einer Rechengröße  $Y(s)$  gemäß

$$X(z, s) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -\cos(\mu(s)(1-z)) + \cos(\mu(s)) \cosh(\mu(s)z) + \cosh(\mu(s))(-\cos(\mu(s)z) + \cosh(\mu(s)z)) \\ + \sin(\mu(s)z) \sinh(\mu(s)) + (\sin(\mu(s)) - \sinh(\mu(s))) \sinh(\mu(s)z) \end{array} \right\}}{4\mu^2(s)} Y(s) \quad (4.42)$$

$$U(s) = \frac{1 + \cos(\mu(s)) \cosh(\mu(s))}{2} Y(s) \quad (4.43)$$

bestimmt werden<sup>1</sup>. Offensichtlich stellt  $Y(s)$  einen flachen Ausgang bzw. eine Basisgröße für das System dar, wobei  $Y(s)$  keine physikalische Interpretation zulässt.

#### 4.4.2 Rücktransformation durch Reihenentwicklung

Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt durch Reihenentwicklung der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, womit sich (4.44), (4.45) zu

$$X(z, s) = \left( \frac{z^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{z^{4k+2}}{(4k+2)!(4(n-k))!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{4k+3}}{(4k+3)!(4(n-k)-1)!} \right] \mu^{4n}(s) \right) Y(s)$$

$$U(s) = \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(4n)!} \mu^{4n}(s) \right) Y(s)$$

ergeben (Rudolph, 2003; Meurer, Thull u. a., 2008). Mittels der Korrespondenz  $s^n Y(s) \leftrightarrow y^{(n)}(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , folgt die entsprechende Reihendarstellung der Zustands- und Eingangsparametrierung zu

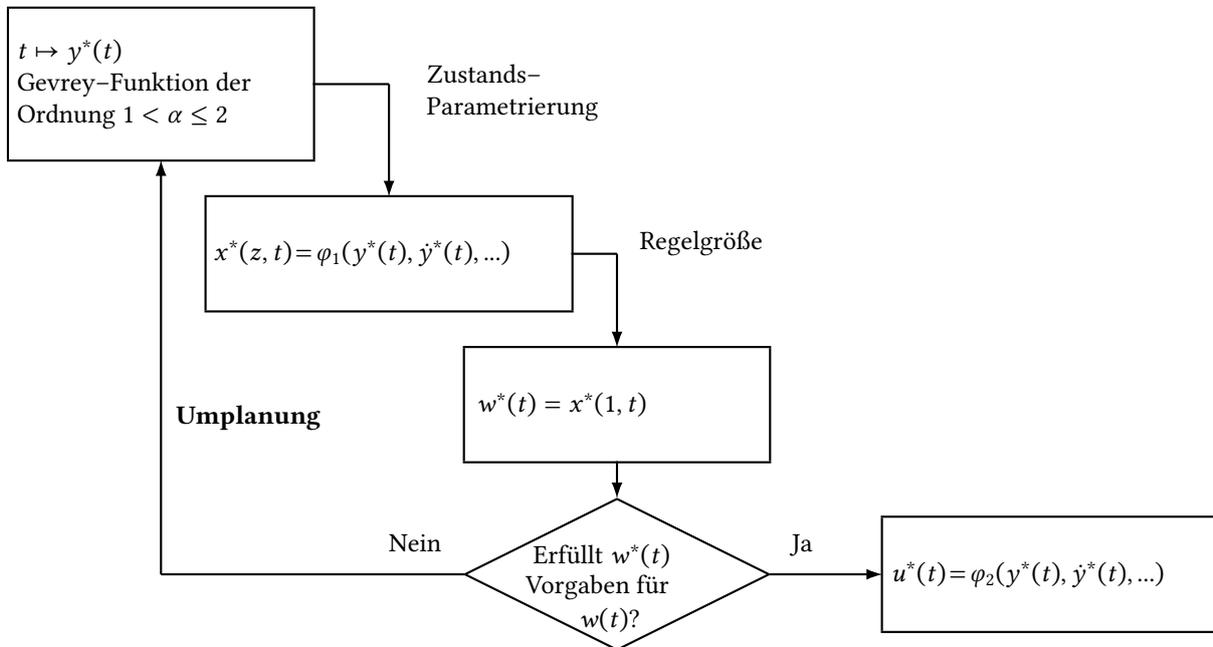
$$x(z, t) = \frac{z^2}{2} y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z^{4k+2}}{(4k+2)!(4(n-k))!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{4k+3}}{(4k+3)!(4(n-k)-1)!} \right) \frac{d^{2n} y(t)}{dt^{2n}}, \quad (4.44)$$

$$u(t) = y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(4n)!} \frac{d^{2n} y(t)}{dt^{2n}}. \quad (4.45)$$

<sup>1</sup>Die hierbei getroffene Zuweisung der Vorfaktoren  $1/(4\mu^2(s))$  bzw.  $1/2$  erfolgt aus rein rechen-technischen Gründen im Hinblick auf die folgende Rücktransformation.

Der Nachweis gleichmäßiger Konvergenz für alle  $z \in [0, 1]$  führt auf die Bedingung, dass  $y(t)$  eine Gevrey-Funktion der Ordnung  $1 < \alpha < 2$  sein muss (Rudolph, 2003). Somit kann durch Vorgabe einer Solltrajektorie  $t \mapsto y^*(t)$  für den flachen Ausgang  $y(t)$  direkt aus (4.44) die entsprechende transiente Sollausslenkung  $x^*(z, t)$  ermittelt werden. Die zur Realisierung dieses Auslenkungsprofils notwendige Steuerung  $u^*(t)$  ergibt sich unmittelbar durch Auswertung von (4.45) mit  $y(t)$  ersetzt durch  $y^*(t)$ .

### 4.4.3 Trajektorienplanung für die Regelgröße



**Abb. 4.13:** Schema der iterativen Trajektorienplanung falls der flache Ausgang  $y(t)$  und die Regelgröße  $w(t)$  nicht korrespondieren.

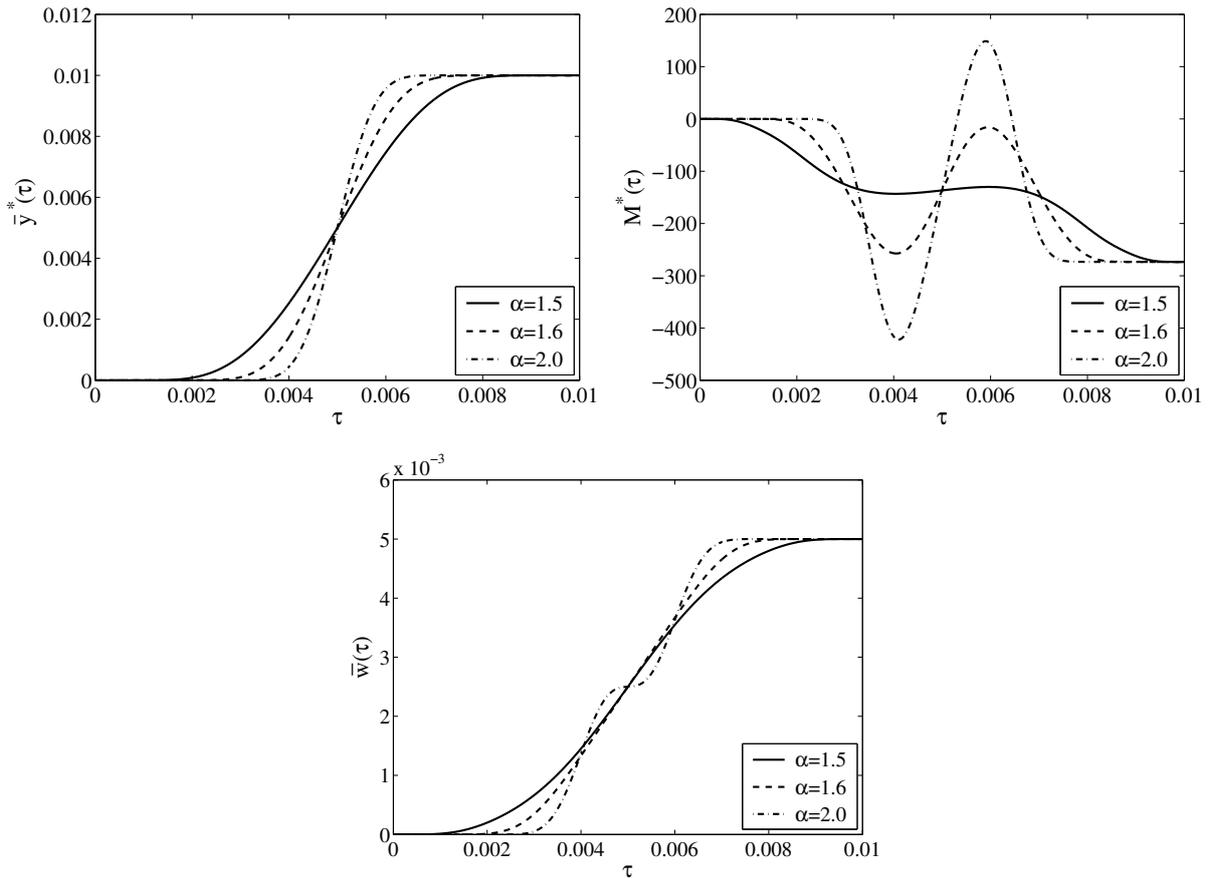
Es sei an dieser Stelle nochmals betont, dass  $y(t)$  keine physikalische Bedeutung zugewiesen werden kann, so dass beispielsweise die Realisierung einer Solltrajektorie für die Regelgröße  $w(t) = x(1, t)$  ein iteratives Vorgehen erfordert, das in Abbildung 4.13 zusammengefasst ist. Insbesondere erweist sich der **Verlust der physikalischen Interpretierbarkeit des flachen Ausgangs** als charakteristisch für PDgln. der Ordnung größer zwei in der örtlichen Ableitung (Fliess, Mounier u. a., 1997; Rudolph und Woittennek, 2002; Rudolph, 2003; Meurer, 2013b).

### Simulationsergebnisse

Zur Illustration der flachheitsbasierten Trajektorienplanung und Steuerung für den betrachteten Euler-Bernoulli Biegebalken sind in Abbildung 4.14 Simulationsergebnisse bei Variation der Gevrey-Ordnung  $\alpha \in \{1.5, 1.6, 2\}$  der Solltrajektorie  $y^*(t)$  gemäß (4.11) zusammengestellt. Hierzu wird ein Balken mit quadratischem Querschnitt der Breite  $B = 0.025$  m und der Länge  $L = 0.5$  m betrachtet, wobei als Material Stahl angenommen wird. Die Übergangszeit für den untersuchten Übergang zwischen stationären Ruhelagen wird zu  $\bar{T} = 0.01$  s gewählt. Den Verlauf der Solltrajektorie  $\bar{y}^*(\tau)$  für den flachen Ausgang, des entsprechenden Moments  $M^*(\tau)$  und der Regelgröße  $\bar{w}(\tau) = \bar{x}(L, \tau)$  aus einer Finite-Element-Simulation mit dem angreifenden Moment  $M^*(\tau)$  zeigt Abbildung 4.14.

## 4.5 Verallgemeinerung flachheitsbasierter Methoden

Neben der Anwendung des vorgestellten Potenzreihenansatzes sowie der Operatorenrechnung im Laplace-Bereich kann für Rieszsche Systeme ein sehr systematischer Zugang zur Konstruktion eines flachen Ausgangs und der Bestimmung der Zustands- und Eingangsparametrierung entwickelt werden (Meurer, 2011; Meurer, 2013b; Schröck u. a., 2013). Hierbei wird die Tatsache ausgenutzt, dass die Resolvente für diese Systemklasse in expliziter Form vorliegt. Dies ermöglicht es insbesondere neben der einheitlichen Behandlung von gekoppelten Systemen linearer PDgln. mit sowohl Randeingriff oder örtlich-verteilterm Eingriff auch PDgln. mit örtlich mehrdimensionalem Definitionsgebiet zu behandeln (Meurer, 2011; Meurer, 2013b; Schröck u. a., 2013).



**Abb. 4.14:** Simulationsergebnis für den Euler–Bernoulli Biegebalken: zeitlicher Verlauf der Solltrajektorie  $\bar{y}^*(\tau)$  (oben), des Biegemoments  $M^*(\tau)$  (Mitte) und der Regelgröße  $\bar{w}(\tau) = \bar{x}(L, \tau)$  aus einer Finite–Element–Simulation mit dem angreifenden Moment  $M^*(\tau)$  (unten).

Ein alternativer Zugang beruht auf der formalen Integration der PDgl., womit sowohl gewisse örtlich mehrdimensionalen Geometrien als auch orts- und zeitvariable Parameter in die flachheitsbasierte Entwurfsmethodik integriert werden können (Meurer und Kugi, 2009b). Darüber hinaus erlaubt dieser Ansatz auch eine Generalisierung auf gewisse Klassen nichtlineare PDgl. (Schörkhuber u. a., 2012; Schörkhuber u. a., 2013).

## 4.6 Folgeregelung mittels des Zwei–Freiheitsgradientwurfs

Die bisherigen Ergebnisse zur flachheitsbasierten Trajektorienplanung und zum Vorsteuerungsentwurf für SVPn mit Randeingriff können unmittelbar mit den in den Kapiteln 2 und 3 betrachteten Methoden zur BIBO- bzw. asymptotischen oder exponentiellen Stabilisierung in einem Zwei–Freiheitsgradientwurf kombiniert werden. Hieraus ergibt sich insbesondere die Möglichkeit eines systematischen Entwurfes von stabilisierenden Trajektorienfolgeregelungen. Das prinzipielle Vorgehen wird im Folgenden einführend anhand zweier Beispiele, der linearen Wärmeleitungsgleichung aus Abschnitt 4.2.1 und dem Diffusions–Konvektions–Reaktionssystem mit nichtlinearem Quellterm aus Abschnitt 4.2.2, erläutert.

### 4.6.1 Trajektorienfolgeregelung für eine lineare Wärmeleitungsgleichung

Auf Basis der linearen PDgl. des Wärmeleiters, d.h.

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.46a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0, \quad x(1, t) = u(t), \quad t > 0 \quad (4.46b)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (4.46c)$$

wurde in Abschnitt 4.2.1 gezeigt, dass  $x(0, t) = y(t)$  einen flachen Ausgang bzw. eine Basisgröße darstellt, womit eine differenzielle Parametrierung von  $x(z, t)$  und  $u(t)$  ermöglicht wird. Somit kann durch Vorgabe einer glatten Solltrajektorie  $t \mapsto y^*(t)$  für den flachen Ausgang direkt der Verlauf des entsprechenden Zustandes  $x^*(z, t)$  und des Eingangs  $u^*(t)$  ermittelt werden. Aufgrund des Vorgehens zur Bestimmung der Parametrierungen ist leicht einsichtig, dass  $x^*(z, t)$  und  $u^*(t)$  die Gleichungen (4.46) identisch erfüllen, weshalb gilt

$$\frac{\partial x^*(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 x^*(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.47a)$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial z}(0, t) = 0, \quad x^*(1, t) = u^*(t), \quad t > 0 \quad (4.47b)$$

$$x^*(z, 0) = x_0^*(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (4.47c)$$

Die Einführung des Trajektorienfolgefehlers  $e(z, t) = x(z, t) - x^*(z, t)$  mit  $\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$  führt somit direkt auf die Gleichungen des verteilt-parametrischen Fehlersystems

$$\frac{\partial e(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 e(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.48a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z}(0, t) = 0, \quad e(1, t) = \Delta u(t), \quad t > 0 \quad (4.48b)$$

$$e(z, 0) = e_0(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (4.48c)$$

Aufgrund der Linearität der Systemgleichungen entspricht das Fehlersystem dem ursprünglichen System (4.46).

Offensichtlich kann die neue Stellgröße  $\Delta u(t)$  zum Entwurf eines Reglers für die Dynamik des Folgefehlers (4.48) so genutzt werden, dass für die Norm gilt  $\|e(z, t)\|_X \rightarrow 0$  mit einem vorgegebenen asymptotischen bzw. exponentiellen Abklingverhalten in einem geeigneten Zustandsraum  $X$  (hier beispielsweise  $L^2$ ). Zur Lösung dieser Entwurfsaufgabe können nun unmittelbar die in den Kapiteln 2 und 3 behandelten Ansätze der BIBO-Stabilisierung, der spektralen Analyse, der direkten Methode nach Lyapunov und des Entwurfs von Zustandsregelungen herangezogen werden. Insbesondere kann aus Beispiel 2.5 (mit der Koordinatentransformation  $z \mapsto (L - z)/\sqrt{\lambda}$  und  $L \mapsto L/\sqrt{\lambda}$ ) direkt abgeleitet werden, dass die Ausgangsrückführung  $\Delta u(t) = K e(0, t)$  für  $-1 < K < \cosh(\pi)$  die BIBO-Stabilität des geschlossenen Regelkreises gewährleistet.

## 4.6.2 Trajektorienfolgeregelung für ein nichtlineares Diffusions-Reaktionssystem

Ausgehend von den obigen Ergebnissen für den linearen Wärmeleiter wird im Folgenden der Entwurf einer Trajektorienfolgeregelung für das Diffusions-Reaktionssystem mit quadratischem Reaktionsterm (4.14) auf Basis der ermittelten flachheitsbasierten Parametrierung (4.20), (4.21) untersucht.

Da der Sollzustand  $x^*(z, t)$  für  $u(t) = u^*(t)$  die Systemgleichungen (4.14) identisch erfüllt (Voraussetzung gleichmäßige Konvergenz), führt die Einführung des Trajektorienfolgefehlers  $e(z, t) = x(z, t) - x^*(z, t)$  mit  $\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$  auf die entsprechenden Gleichungen des verteilt-parametrischen Fehlersystems

$$\frac{\partial e(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 e(z, t)}{\partial z^2} + \gamma (\psi(e(z, t) + x^*(z, t)) - \psi(x^*(z, t))), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (4.49a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z}(0, t) = 0, \quad e(1, t) = \Delta u(t), \quad t > 0 \quad (4.49b)$$

$$e(z, 0) = e_0(z) = x_0(z) - x^*(z, 0), \quad z \in [0, 1] \quad (4.49c)$$

mit  $\psi(e(z, t) + x^*(z, t)) = (e(z, t) + x^*(z, t))^2$ . Offensichtlich ergibt sich aufgrund der Nichtlinearität in den Systemgleichungen ein ebenfalls nichtlineares Fehlersystem mit dem orts- und zeitvariablen Koeffizienten  $x^*(z, t)$ . Unter der Annahme einer hinreichend kleinen Abweichung zwischen Ist- und Sollzustand  $x(z, t)$  und  $x^*(z, t)$  kann die Nichtlinearität  $\psi(e(z, t) + x^*(z, t))$  um den Sollzustand  $x^*(z, t)$  bzw. um  $e(z, t) = 0$  linearisiert werden

$$\psi(e(z, t) + x^*(z, t)) \approx \psi(x^*(z, t)) + \frac{d\psi}{dx}(x^*(z, t))e(z, t).$$

Dies liefert zusammen mit (4.49) das um den Sollzustand  $x^*(z, t)$  linearisierte Fehlersystem mit einem orts- und

zeitvariablen Reaktionsparameter

$$\frac{\partial e(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 e(z, t)}{\partial z^2} + 2\gamma x^*(z, t)e(z, t), \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (4.50a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z}(0, t) = 0, \quad e(1, t) = \Delta u(t), \quad t > 0 \quad (4.50b)$$

$$e(z, 0) = e_0(z) = x_0(z) - x^*(z, 0), \quad z \in [0, 1]. \quad (4.50c)$$

Letzteres kann als Basis für den Entwurf einer stabilisierenden Ausgangs- bzw. Zustandsrückführung herangezogen werden, wobei sich hierbei jedoch Schwierigkeiten durch den orts- und zeitvariablen Parameter in (4.50a) ergeben, der direkt proportional zu dem Sollzustand  $x^*(z, t)$  ist.

Offensichtlich kann aufgrund der Zeitvarianz keine Darstellung im Bildbereich der Laplace-Transformation erfolgen, weshalb der Entwurf einer BIBO-stabilisierenden Ausgangsrückführung mit den Methoden aus Kapitel 2 nicht möglich ist. Aus dem selben Grund ist eine abstrakte Darstellung gemäß den Ausführungen in Kapitel 3.1 nicht unmittelbar bestimmbar und erfordert eine weitergehende mathematische Analyse. Des Weiteren existiert aufgrund der Zeitvarianz der System-PDgl. (4.50a) keine Laplace-Transformierte weshalb die in Kapitel 2 eingeführten Entwurfsmethoden nicht anwendbar sind. Zudem stellt der Systemoperator keinen Rieszschen Operator dar, weshalb auch die Anwendung der Methoden aus Abschnitt 3.4.2 nur eingeschränkt möglich ist.

Einen Zugang zum Entwurf einer stabilisierenden Zustandsrückführung bietet hier der **Backstepping**-Ansatz aus Abschnitt 3.4.1. Dazu jedoch aufgrund der Zeitvarianz eine Transformation des SVPn (4.50) gemäß

$$w(z, t) = e(z, t) - \int_0^z k(z, \zeta, t)e(\zeta, t)d\zeta$$

mit dem zu bestimmenden Integrationskern  $k(z, \zeta, t)$  in ein exponentiell stabiles SVPn, beispielsweise

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} - \mu w(z, t), \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (4.51a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(0, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.51b)$$

$$w(z, 0) = w_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (4.51c)$$

mit  $\mu > 0$ , bestimmt (Meurer und Kugi, 2009a). Ergebnisse zur Trajektorienfolgeregelung für nichtlineare Diffusions-Konvektions-Reaktionssysteme im Rahmen des Zwei-Freiheitsgradentwurfs mit flachheitsbasierter Trajektorienplanung und Steuerungsentwurf in Kombination mit Backstepping-basierten Methoden zum Entwurf einer stabilisierenden Regelung sind in Meurer und Kugi, 2007; Meurer und Kugi, 2008 zu finden.

## Literatur

- Dunbar, W., N. Petit, P. Rouchon und P. Martin (2003). „Motion Planning for a nonlinear Stefan Problem“. In: *ESAIM Contr. Optim. Ca.* 9, S. 275–296 (siehe S. 124).
- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon (1992). „On differentially flat nonlinear systems“. In: *Nonlinear Control Systems Design*. Hrsg. von M. Fliess, S. 408–412 (siehe S. 118).
- (1995). „Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples“. In: *Int. J. Control* 61, S. 1327–1361 (siehe S. 117, 118).
- (1999). „A Lie-Bäcklund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems“. In: *IEEE Trans. Automatic Control* 44.5, S. 922–937 (siehe S. 118).
- Fliess, M., H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph (1997). „Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d’une poutre flexible“. In: *ESAIM Proceedings* 2, S. 183–193 (siehe S. 121, 123, 137).
- Godlewski, E. und P. Raviart (1996). *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Bd. 118. Applied mathematical sciences. New York: Springer-Verlag (siehe S. 130).
- Heuser, H. (1993). *Lehrbuch der analysis, teil 1*. Tenth. Stuttgart: B.G. Teubner (siehe S. 121).
- Hua, C. und L. Rodino (1995). „General theory of partial differential equations and micrological analysis“. In: *Proc. Workshop on general theory of PDEs and micrological analysis*. Hrsg. von Q. Min-You und L. Rodino. Int. Center for Theoretical Physics, Trieste (I): Longman, S. 6–81 (siehe S. 121).
- (1996). „General theory of PDE and Gevrey classes“. In: *General theory of PDEs and microlocal analysis*. Hrsg. von Q. Min-You und L. Rodino. Addison Wesley, S. 6–81 (siehe S. 123).
- Laroche, B., P. Martin und P. Rouchon (2000). „Motion planning for the heat equation“. In: *Int. J. Robust Nonlinear Control* 10, S. 629–643 (siehe S. 124, 128).
- Lynch, A. und J. Rudolph (2002). „Flatness-based boundary control of a class of quasilinear parabolic distributed parameter systems“. In: *Int. J. Control* 75.15, S. 1219–1230 (siehe S. 123, 127).
- Meurer, T. (2005). *Feedforward and Feedback Tracking Control of Diffusion-Convection-Reaction Systems using Summability Methods*. Fortschr.-Ber. VDI reihe 8 nr. 1081. VDI Verlag, Düsseldorf (siehe S. 128).
- (2011). „Flatness-based trajectory planning for Diffusion-Reaction systems in a Parallelepipedon – A spectral approach“. In: *Automatica* 47.5, S. 935–949 (siehe S. 128, 137).
- Meurer, T. und M. Krstic (2010). „Nonlinear PDE-based motion planning for the formation control of mobile agents“. In: *Proc. 8th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2010)*. Bologna (I), S. 599–604 (siehe S. 128).
- (2011). „Finite-time multi-agent deployment: A nonlinear PDE motion planning approach“. In: *Automatica* 47.11, S. 2534–2542 (siehe S. 128).
- Meurer, T. und A. Kugi (2008). „Zur Kombination von differenzieller Flachheit und Backstepping für die Trajektorienfolge-regelung eines Diffusions-Konvektions-Reaktionssystems“. In: *Ei Elektrotechnik Informationstechnik* 125.1/2, S. 2–11 (siehe S. 140).
- (2009a). „Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: combining backstepping and flatness“. In: *Automatica* 45.5, S. 1182–1194 (siehe S. 140).
- (2009b). „Trajectory planning for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters on higher-dimensional spatial domains“. In: *IEEE T Autom. Contr* 54.8, S. 1854–1868 (siehe S. 138).
- Meurer, T. und M. Zeitz (2004a). „Flatness-based feedback control of diffusion-convection-reaction systems via k-summable power series“. In: *Proc. 6th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*. Stuttgart (D), S. 191–196 (siehe S. 128).
- (2004b). „Two-degree-of-freedom tracking control design for boundary controlled distributed parameter systems using formal power series“. In: *Proc. IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Bahamas, S. 3307–3312 (siehe S. 128).
- (2005). „Feedforward and feedback tracking control of nonlinear diffusion-convection-reaction systems using summability methods“. In: *Ind. Eng. Chem. Res.* 44, S. 2532–2548 (siehe S. 128).
- (2008). „Model inversion of boundary controlled parabolic partial differential equations using summability methods“. In: *Math Comp Model Dyn Sys MCMDS* 14.3, S. 213–230 (siehe S. 128).
- Meurer, T. (2013a). *Control of Higher-Dimensional PDEs: Flatness and Backstepping Designs*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag (siehe S. 117).
- (2013b). *Control of Higher-Dimensional PDEs: Flatness and Backstepping Designs*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag (siehe S. 137).
- Meurer, T. und A. Kugi (2007). „TRACKING CONTROL FOR A DIFFUSION-CONVECTION-REACTION SYSTEM: COMBINING FLATNESS AND BACKSTEPPING“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 40.12, S. 140–145 (siehe S. 140).
- Meurer, T., D. Thull und A. Kugi (2008). „Flatness-based tracking control of a piezoactuated Euler-Bernoulli beam with non-collocated output feedback: theory and experiments“. In: *Int. J. Contr.* 81.3, S. 475–493 (siehe S. 136).
- Rothfuß, R. (1997). *Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 664. VDI Verlag, Düsseldorf (siehe S. 118).

- Rudolph, J. (2003). *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Aachen: Shaker-Verlag (siehe S. 121, 136, 137).
- Rudolph, J. und F. Woittennek (2002). „Flachheitsbasierte Randsteuerung von elastischen Balken mit Piezoaktuatoren“. In: *at-Automatisierungstechnik* 50, S. 412–421 (siehe S. 137).
- Schörkhuber, B., T. Meurer und A. Jüngel (2012). „Flatness-based trajectory planning for semilinear parabolic PDEs“. In: *Proc. IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Maui (HI), USA, S. 3538–3543 (siehe S. 138).
- (2013). „Flatness of semilinear parabolic PDEs – a generalized Cauchy-Kowalevski approach“. In: *IEEE T Autom. Contr* 58.9, S. 2277–2291 (siehe S. 138).
- Schröck, J., T. Meurer und A. Kugi (2013). „Motion planning for piezo-actuated flexible structures: modeling, design, and experiment“. In: *IEEE T. Contr. Sys. Techn.* 21.3, S. 807–819 (siehe S. 137).
- Wagner, M., T. Meurer und M. Zeitz (2004). „K-summable power series as a design tool for feedforward control of diffusion-convection-reaction systems“. In: *Proc. 6th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*. Stuttgart (D), S. 149–154 (siehe S. 128).

# Anhang A

## Eigenschaften und Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Die folgende Auflistung fasst die wichtigsten Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace-Transformation zusammen:

Laplace-Integral	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	$(\Re\{s\} = \sigma > \gamma)$
Umkehr-Integral	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) _{t>0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds$	$(c > \gamma)$
Linearität	$\mathcal{L}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\},$ $\mathcal{L}^{-1}\{k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)\} = k_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + k_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$	$(k_{1,2} \text{ beliebig})$
Maßstabsänderung	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$(a \in \mathbb{R}^+)$
Zeitverschiebung	$\mathcal{L}\{\sigma(t-b)f(t-b)\} = e^{-bs} F(s)$	$(b \in \mathbb{R}^+)$
Frequenzverschiebung	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s \pm c)\} = e^{\mp ct} f(t)$	$(c \in \mathbb{C})$
Integration	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \dots \int_0^t f(\tau) d\tau^n\right\} = \frac{1}{s^n} F(s)$	
Gewöhnliche Differentiation	$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$	
Verallgemeinerte Differentiation	$\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0-) - \dots - f^{(n-1)}(0-)$	
Differentiation der Bildfunktion	$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$	
Faltungsintegral	$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau) d\tau = f_1(t) \star f_2(t)$	
Grenzwertsätze	<ul style="list-style-type: none"> <li>Anfangswert-Satz</li> </ul> $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Endwert-Satz, Voraussetzung: <math>\exists f(t \rightarrow \infty)</math></li> </ul> $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	

Tab. A.1: Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace-Transformation.

Ergänzend sind in Tabelle A.2 einige wichtige Korrespondenzen der Laplace-Transformation aufgeführt, die

in verschiedenen Anwendungen (insbesondere zur Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen) von Bedeutung sind. Weitere und deutliche allgemeinere Korrespondenzen, u.a. für transzendente Funktionen in der Laplace-Variable  $s$  sind beispielsweise (Roberts und Kaufman, 1966) und den dort aufgeführten Referenzen zu entnehmen.

Nr.	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, t > 0, c \geq \gamma$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \Re\{s\} = \sigma > \gamma$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$ und 1	$\frac{1}{s}$
3	$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
6	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
9	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
10	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
11	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

Tab. A.2: Korrespondenzen der Laplace-Transformation.

## Literatur

Roberts, G. und H. Kaufman (1966). *Table of laplace transforms*. W.B. Saunders Complanly (siehe S. A2).



# Anhang B

## Grundlagen der Funktionalanalysis und Operatortheorie

### B.1 Grundbegriffe

#### B.1.1 Lebesgue quadratisch integrierbaren Funktionen

Der Raum  $L^2(a, b)$  der **Lebesgue integrierbaren Funktionen** ausgestattet mit der Norm  $\|x\|^2 := \int_a^b |x(z)|^2 dz$  ist ein **Banach-Raum**. Mit dem inneren Produkt  $\langle x, y \rangle_{L^2(a,b)} := \int_a^b x(z)\overline{y(z)} dz$  wird  $L^2(a, b)$  zum **Hilbert-Raum** (Curtain und Zwart, 1995, Appendix). Hierbei stellt  $\overline{y(z)}$  die konjugiert Komplexe zu  $y(z)$  dar.

#### B.1.2 Direkte Summe

Die **direkte Summe**  $V \oplus W$  zweier Vektorräume  $V$  und  $W$  entspricht der kartesischen Produktmenge  $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$ . Beispiel: Seien  $V = W = \mathbb{R}$ , so gilt  $x \in V \oplus W \Rightarrow x = [v, w]^T$  für  $v \in V, w \in W$ .

#### B.1.3 Abgeschlossener Operator

Ein linearer Operator  $T$  wird als **abgeschlossener Operator** bezeichnet, wenn aus  $x_n \in D(T), n \in \mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y$  folgt, dass  $x \in D(T)$  und  $Tx = y$  (Curtain und Zwart, 1995, Definition A.3.43).

#### B.1.4 Dichte Teilmenge und Abschluss

Eine Teilmenge  $V$  eines normierten linearen Raums  $X$  ist **dicht** in  $X$ , wenn für den Abschluss  $\overline{V}$  von  $V$  gilt, dass  $\overline{V} = X$ . Der **Abschluss**  $\overline{V}$  eines normierten linearen Raumes  $V$  ist definiert als die Menge  $V$  vereinigt mit der Menge aller Grenzwerte von Folgen in  $V$ , d.h.  $\overline{V} := \{x \in V \mid \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in V \forall n \in \mathbb{N} \text{ so, dass } \|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty\}$ . Eine Menge  $V$  in einem normierten linearen Raum  $X$  wird **abgeschlossen** genannt, wenn jede konvergente Folge von Elementen aus  $V$  einen Grenzwert in  $V$  besitzt.

#### B.1.5 Operatornorm

Sei  $T$  ein beschränkter Operator mit  $D(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow Y$ . Die Norm von  $T$ , d.h. die so genannte **Operatornorm**, ist definiert als

$$\|T\| := \sup_{x \in D(T), x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_{\mathcal{X}}}. \quad (\text{B.1})$$

Hierzu äquivalent ist

$$\|T\| := \sup_{x \in D(T), \|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Tx\|_Y. \quad (\text{B.2})$$

## B.2 Das Hille–Yoshida Theorem

Das **Hille–Yoshida Theorem** erlaubt eine Charakterisierung der infinitesimalen Generatoren von  $C_0$ -Halbgruppen (Curtain und Zwart, 1995; Jünger, 2001). Mit Definition 3.7 kann der folgende Zusammenhang zwischen Resolvente und Wachstum der Halbgruppe angegeben werden.

### Satz B.1

Sei  $T(t)$  eine  $C_0$ -Halbgruppe mit infinitesimalem Generator  $A$  und Wachstumsgrenze  $\omega$ . Sei  $\Re\{\lambda\} > \omega_1 > \omega$ , so folgt  $\lambda \in \rho(A)$  und es gilt  $\forall x \in X$ ,

$$R(\lambda, A)x = (\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \text{ und } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\Re\{\lambda\} - \omega_1}.$$

Der Beweis dieser Aussage ist z.B. in (Curtain und Zwart, 1995) zu finden. Mit diesen Vorgaben kann nun das **Hille–Yoshida Theorem zur Charakterisierung eines Generators  $A$**  formuliert werden (Curtain und Zwart, 1995).

### Satz B.2: Hille–Yoshida Theorem

Ein linearer Operator  $A$  ist der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  mit  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ ,  $M, \omega \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn

- (i)  $A$  abgeschlossen ist mit  $\overline{D(A)} = X$  und
- (ii) für jedes  $\lambda > \omega$  mit  $\lambda \in \rho(A)$  gilt  $\|R(\lambda, A)^r\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^r} \quad \forall r \in \mathbb{N}$ .

Es sei bemerkt, dass das Hille-Yoshida Theorem in verschiedenen (äquivalenten) Formulierungen verfügbar ist, wobei insbesondere Bedingung (ii) unterschiedliche Darstellungen zulässt, siehe z.B. Pazy, 1992.

## B.3 Das Lumer–Phillips Theorem

Neben dem Hille–Yoshida Theorem erlaubt das **Lumer–Phillips Theorem** eine alternative Charakterisierung der infinitesimalen Generatoren einer kontrahierenden  $C_0$ -Halbgruppe. Hierzu wird der Begriff eines **dissipativen Operators** eingeführt (siehe, z.B. Cazenave und Haraux, 1998; Liu und Zheng, 1999), dessen direkte Charakterisierung die folgende Definition liefert.

### Definition B.1: Dissipativer Operator

Sei  $X$  ein reeller oder komplexer Hilbertraum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  und induzierter Norm  $\|\cdot\|_X$ . Sei  $A$  ein linearer Operator mit  $D(A)$  dicht in  $X$ . Dann wird  $A$  dissipativ genannt, wenn für alle  $x \in D(A)$  gilt, dass

$$\Re\{\langle Ax, x \rangle_X\} \leq 0. \tag{B.3}$$

Eine alternative Möglichkeit zur Definition dissipativer Operatoren erfordert die Einführung des Konzepts eines **Dualraums**.

### Definition B.2: Lineare Abbildung, lineares Funktional, Dualraum

Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  halbnormierte Räume über einem Körper  $\mathbb{K}$  (z.B.  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Eine Abbildung  $Abb : X \rightarrow Y$  heißt **linear** wenn

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in X : Abb(\alpha x + \beta y) = \alpha Abb(x) + \beta Abb(y).$$

Eine lineare Abbildung nennt man auch Operator oder im Fall  $Y = \mathbb{K}$  auch **lineares Funktional**. Im Weiteren bezeichnet  $\mathcal{L}(X, Y)$  die Menge aller linearen stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Die Menge  $X'$  aller linearen stetigen Funktionalen  $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  von  $X$  in den Grundkörper  $\mathbb{K}$  wird als **Dualraum** bezeichnet.

Es sei  $x' \in X'$ . Für jedes  $y \in X$  existiert genau ein  $x \in X$ , so dass  $x'(y) = \langle x, y \rangle$ . Hierbei wird  $x'(y)$  als Dualitätsprodukt bezeichnet. Insbesondere gilt somit  $x'(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ . Somit kann nun der Begriff eines **dissipativen Operators** definiert werden (Pazy, 1992).

### Definition B.3: Dissipativer Operator

Ein linearer Operator  $A$  wird **dissipativ** genannt, falls für jedes  $x \in D(A)$  ein  $x' \in F(x) = \{x' \mid x' \in X' \text{ mit } x'(x) = \|x\|^2 = \|x'\|^2\} \subseteq X'$  existiert, so dass  $\Re\{x'(Ax)\} \leq 0$ .

Damit kann der folgende Satz zur Charakterisierung dissipativer Operatoren herangezogen werden Pazy, 1992.

### Satz B.3

Ein linearer Operator  $A$  ist genau dann dissipativ, wenn

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \text{ für alle } x \in D(A) \text{ und } \lambda > 0.$$

Dieses Ergebnisse bieten unmittelbar eine direkte Möglichkeit zum Nachweis der Dissipativität eines Operators durch Auswerten der Bedingung (B.3). Den Zusammenhang zwischen der Dissipativität eines Operators und der Existenz einer zugehörigen kontrahierenden Halbgruppe liefert das Lumer–Phillips Theorem Pazy, 1992.

### Satz B.4: Lumer–Phillips Theorem

Sei  $A$  ein linearer Operator mit  $D(A)$  dicht in  $X$ . Dann gelten:

- (i) <sup>1</sup>Wenn  $A$  dissipativ ist und ein  $\lambda_0 > 0$  existiert, so dass das Bild von  $\lambda_0 I - A$  identisch  $X$  ist, dann ist  $A$  der infinitesimale Generator einer kontrahierenden  $C_0$ -Halbgruppe auf  $X$ .
- (ii) Wenn  $A$  der infinitesimale Generator einer kontrahierenden  $C_0$ -Halbgruppe auf  $X$  ist, dann ist das Bild von  $\lambda I - A$  identisch  $X$  für alle  $\lambda > 0$  und  $A$  ist dissipativ. Des Weiteren gilt für alle  $x \in D(A)$  und alle  $x' \in F(x)$ , dass  $\Re\{x'(Ax)\} \leq 0$ .

Das Hille–Yoshida und Lumer–Phillips Theorem werden im Folgenden eine wichtige Rolle zum Nachweis der Stabilität verteilt-parametrischer Regelstrecken spielen.

## B.4 Lösung der Zustandsgleichungen

Ausgehend vom (**abstrakten**) **inhomogenen Cauchy–Problem**

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad t > 0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in D(A) \quad (\text{B.4})$$

mit dem Operator  $A \in D(A) \subset X$  im Hilbertraum  $X$  konnte anhand der Beispiele 3.1 und 3.3 für die lineare Wärmeleitungsgleichung und die ungedämpfte Wellengleichung motiviert werden, dass mittels der  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  eine allgemeine Lösung von (B.4) in der Form

$$\mathbf{x}(t) = T(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t T(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (\text{B.5})$$

gegeben ist. Im Weiteren wird anhand zweier Spezialfälle eine explizite Auswertung von (B.5) abgeleitet.

### B.4.1 Rieszsche Operatoren

Für die Klasse der Rieszschen Operatoren kann die Lösung der Zustandsgleichung (B.4) besonders leicht ermittelt werden

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(t-\tau)} \langle B\mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\psi}_n \rangle_X \boldsymbol{\phi}_n d\tau \quad (\text{B.6})$$

$$= T(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t T(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (\text{B.7})$$

<sup>1</sup>Unter den Voraussetzungen des Satzes ist (i) nach Liu und Zheng, 1999 äquivalent zu den Bedingungen, dass  $A$  dissipativ ist und  $0 \in \rho(A)$ , d.h.  $A^{-1}$  existiert und ist beschränkt. In Anwendungen kann dieser Nachweis oftmals durch eine direkte Berechnung der Inversen erfolgen.

Es sei bemerkt, dass die  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  über die entsprechende **Greensche Funktion** bzw. **Greensche Matrix**  $g(z, \zeta, t)$  des SVPn ausgedrückt werden kann.

### B.4.2 Nicht-Rieszsche Operatoren

In gewissen Fällen stellt der Systemoperator  $A$  keinen Rieszschen Operator dar. Falls  $A$  infinitesimaler Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  ist, so kann diese z.B. entsprechend Satz 3.3, Glg. (3.52) oder über den Zusammenhang zwischen  $C_0$ -Halbgruppen und Greenscher Funktion ermittelt werden. Ein wichtiges Beispiel stellt hierzu die in Abschnitt 2.2 betrachtete Transportgleichung dar. Diese kann in Zustandsdarstellung ( $u(z, t) = 0, u(t) = 0$ ) auf  $X = L^2(0, L)$  wie folgt angeschrieben werden

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad t > 0, x_0 \in D(A) \tag{B.8}$$

mit dem so genannten **Shift-Operator**

$$Ax = -\frac{dx}{dz} \tag{B.9}$$

$$D(A) = \left\{ x \in L^2(0, L) : x \text{ abs. stetig, } \frac{dx}{dz} \in L^2(0, L), x(0) = 0 \right\}. \tag{B.10}$$

Es kann gezeigt werden, dass

$$(T(t)x) = x(t-z)\sigma(t-z) \tag{B.11}$$

eine  $C_0$ -Halbgruppe mit infinitesimalen Generator  $A$  darstellt. Dies ist die so genannte **Shift-Halbgruppe**.

## Literatur

- Cazenave, T. und A. Haraux (1998). *An introduction to semilinear evolution equations*. Clarendon Press, Oxford (siehe S. B6).
- Curtain, R. und H. Zwart (1995). *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Texts in applied mathematics 21. New York: Springer-Verlag (siehe S. B5, B6).
- Jüngel, A. (2001). *Eine Einführung in die Halbgruppentheorie*. Univ. Konstanz (siehe S. B6).
- Liu, Z. und S. Zheng (1999). *Semigroups associated with dissipative systems*. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC (siehe S. B6, B7).
- Pazy, A. (1992). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag (siehe S. B6, B7).



# Anhang C

## Numerische Lösungsverfahren

Analytische Lösungsverfahren für parabolische und hyperbolische PDgln. sind, mit Ausnahme des Charakteristikenverfahrens, typischerweise auf lineare Probleme beschränkt. Typischerweise treten jedoch in realen Anwendungen Nichtlinearitäten auf, wie beispielsweise zustandsabhängige Parameter, Phasenübergänge, Hysterese oder chemische Reaktionen. Des Weiteren sind die örtlichen Berandungen für eine analytische Erfassung oftmals zu komplex, so dass numerische Methoden zur Approximation der Lösung der PDgl(n). eingesetzt werden müssen. Im Folgenden wird deshalb eine kompakte Einführung in die entsprechenden Ansätze gegeben.

### C.1 Numerische Lösung von parabolischen PDgln.

Wie in Abschnitt 1.1 gezeigt führt die mathematische Beschreibung von insbesondere dynamischen Diffusions- und Wärmeleitungsproblemen sowie Reaktionssystemen auf parabolische PDgln. für die gesuchte(n) zeit- und ortsabhängige(n) Funktion(en). Aus numerischer Sicht werden zur Lösung der dabei auftretenden Anfangsrandwertprobleme (ARWP) im Allgemeinen die folgenden Ansätze verfolgt (siehe z.B. Fletcher, 1984; Bathe, 1995; Schwarz, 1997)

- Diskretisierung:
  - **Semi-Diskretisierung** („Method of lines“) bzgl. der Ortskoordinate(n) und numerische Lösung des erhaltenen Systems gewöhnlicher Differenzialgleichungen (numerische Stabilitätsbedingungen bestimmen Wahl von Orts- und Zeitschrittweite)
  - **Voll-Diskretisierung** bzgl. der örtlichen und zeitlichen Koordinaten und Lösung des erhaltenen Systems algebraischer Gleichungen z.B. Crank-Nicholson Verfahren (oft absolut stabil, d.h. unabhängig von Wahl Orts- und Zeitschrittweite, jedoch aufwendiger)
- Gewichtete Residuenverfahren und daraus abgeleitet Finite Elemente Methoden (FEM)

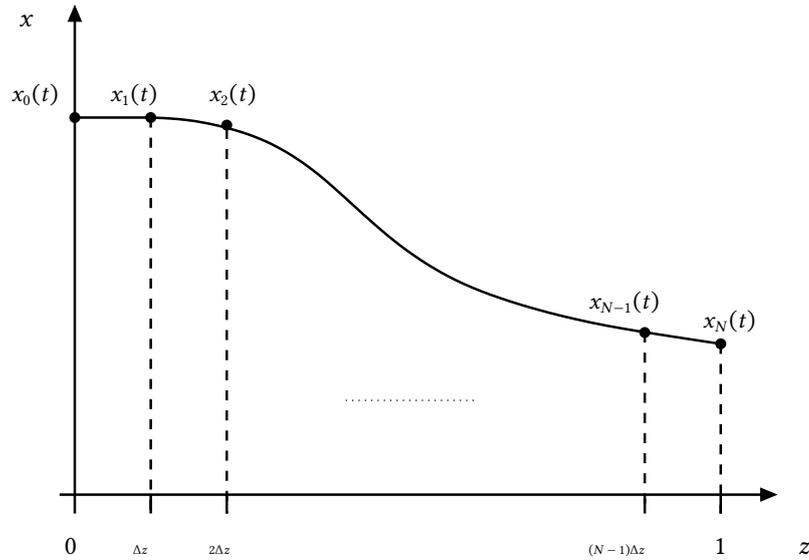
**Beispiel C.1 (Semi-Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung).** Im Folgenden wird für das Benchmark-Beispiel der linearen Wärmeleitungsgleichung das prinzipielle Vorgehen zur expliziten Semi-Diskretisierung mittels des finite Differenzenverfahrens vorgestellt. Die Temperatur  $x(z, t)$  im Wärmeleiter wird hierbei durch die untenstehende PDgl. mit RBn und AB beschrieben

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t), \quad z \in (0, 1), t > 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0, \quad x(1, t) = v(t), \quad t > 0 \quad (\text{C.2})$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1]. \quad (\text{C.3})$$

Das prinzipielle Vorgehen zeigt Abbildung C.1.



**Abb. C.1:** Örtliche Diskretisierung.

Das Einsetzen der bekannten finite Differenzen Approximationen der auftretenden Ableitungen

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=i\Delta z} = \frac{x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t)}{2\Delta z} + \mathcal{O}^2(\Delta z) \text{ oder } \frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{\Delta z} + \mathcal{O}(\Delta z)$$

$$\left. \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right|_{z=i\Delta z} = \frac{x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)}{\Delta z^2} + \mathcal{O}^2(\Delta z)$$

in die PDgl. (C.1) führt somit auf

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} (x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)) + u(z_i, t), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Die entsprechende Auswertung der Rbn (C.2) liefert

$$\frac{x_1(t) - x_{-1}(t)}{2\Delta z} = 0 \Rightarrow x_{-1}(t) = x_1(t)$$

$$x_N(t) = v(t)$$

Hieraus ergibt sich ein  $N$ -dimensionales System gewöhnlicher Differenzialgleichungen für  $x_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  der Form

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = \frac{2a}{\Delta z^2} (x_1(t) - x_0(t)) + u(0, t)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} (x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)) + u(z_i, t), \quad i = 1, \dots, N-2$$

$$\frac{dx_{N-1}(t)}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} (v(t) - 2x_{N-1}(t) + x_{N-2}(t)) + u(z_{N-1}, t)$$

für  $t > 0$  mit der AB

$$x_i(0) = x_0(z_i), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Das grundlegende Vorgehen der Semi-Diskretisierung kann somit wie folgt zusammengefasst werden

- (i) Überführung der PDgl. in ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Dessen numerische Lösung ist eine Standardaufgabe der Numerik.
- (ii) Geeignete Wahl der Zeitschrittweite  $\Delta t$  des numerischen Integrators und der Ortsschrittweite  $\Delta z$ . Diese sind meist nicht unabhängig voneinander. Insbesondere bedingt die numerische Stabilität für Beispiel

C.1, dass die Bedingung  $\Delta t \leq \Delta z^2/2$  erfüllt sein muss (Schwarz, 1997, S. 546). Im Allgemeinen führt die Semi-Diskretisierung nicht auf ein absolut stabiles numerisches Verfahren.

Des Weiteren ist zu bemerken, dass neben den im obigen Beispiel verwendeten Differenzenquotienten auch Approximationen höherer Ordnung verwendet werden können. Während mit dieser Maßnahme die Genauigkeit der Approximation verbessert wird geht hierbei jedoch die vorteilhafte Dreiband-Struktur der erhaltenen Systemmatrix verloren.

**Beispiel C.2 (Semi-Diskretisierung einer semilinearen Wärmeleitungsgleichung).** Ausgehend von den Ausführungen in Beispiel C.1 wird im Weiteren die Semi-Diskretisierung einer semilinearen PDgl. der Form

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + f(x(z, t)) + u(z, t), \quad z \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (\text{C.4})$$

mit RBN und AB analog zu (C.2) und (C.3). Ein analoges Vorgehen unter Berücksichtigung der lokal ausgewerteten Nichtlinearität  $f(x(z, t))$  führt hierbei auf

$$\begin{aligned} \frac{dx_0(t)}{dt} &= \frac{2a}{\Delta z^2} (x_1(t) - x_0(t)) + f(x_0(t)) + u(0, t) \\ \frac{dx_i(t)}{dt} &= \frac{a}{\Delta z^2} (x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)) + f(x_i(t)) + u(z_i, t), \quad i = 1, \dots, N-2 \\ \frac{dx_{N-1}(t)}{dt} &= \frac{a}{\Delta z^2} (v(t) - 2x_{N-1}(t) + x_{N-2}(t)) + f(x_{N-1}(t)) + u(z_{N-1}, t) \end{aligned}$$

für  $t > 0$  mit der AB

$$x_i(0) = x_0(z_i), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Im Hinblick auf den Steuerungs- und Regelungsentwurf und die Simulation des geschlossenen Regelkreises sind insbesondere folgende Programmpakete von Bedeutung:

- MATLAB → Funktion pdepe
  - automatisierte Semi-Diskretisierung für gemischt parabolisch-elliptische Probleme in Kombination mit Zeitintegrator ode15s
  - im Prinzip örtlich ein-dimensionale Probleme

Beispiel C.2 kann hierbei beispielsweise wie folgt implementiert werden.

```
function out=heateqn()

%Preparations
m=0;
zmax=1.0;
tmax=2.0;
z=linspace(0, zmax, 101);
t=linspace(0, tmax, 201);

%System parameter and functions
a=1.0;
f=inline(' -x+5*x^2 ', 'x');
u=inline(' 0 ', 'z', 't');
v=inline(' (t-0.5).*stepfun(t, 0.5)-2*(t-1).*stepfun(t, 1)...
+(t-1.5).*stepfun(t, 1.5)', 't');

%Solver call
sol=pdepe(m, @heat_pde, @heat_ic, @heat_bc, z, t, [], a, f, u, v);
x=sol(:, :, 1);

%Output
out.z = z; out.t = t; out.x = x;
```

```

%Surface plot
figure; mesh(z,t,x); xlabel('z'); ylabel('t');

function [c,g,s]=heat_pde(z,t,x,DxDz,a,f,u,v)
%Partial differential equation
c = 1.0;
g = a*DxDz;
s = f(x) + u(z,t);

function u0=heat_ic(z,a,f,u,v);
%Initial condition
u0 = 0.0;

function [pl,q1,pr,qr]=heat_bc(zl,xl,zr,xr,t,a,f,u,v)
%Boundary conditions
pl=0.0;
q1=1.0;
pr=xr-v(t);
qr=0.0;

```

- MATHEMATICA → Funktion (N)DSolve

```

pde := {D[x[z, t], t] == a*D[x[z, t], {z, 2}] + f[x[z, t]] + u[z, t]}
bcs := {Derivative[1, 0][x][0, t] == 0, x[1, t] == v[t]}
ic := {x[z, 0] == 0}
a := 1
f[x_] := -x + 5*x^2
u[z_, t_] := 0
v[t_] := (t - 1/2)*UnitStep[t - 1/2] -
  2*(t - 1)*UnitStep[t - 1] + (t - 3/2)*UnitStep[t - 3/2]
NDSolve[Flatten[{pde, bcs, ic}], x[z, t], {z, 0, 1}, {t, 0, 2}]
Plot3D[x[z, t] /. %, {z, 0, 1}, {t, 0, 2}]

```

- MAPLE → Funktion pdsolve

## C.2 Numerische Lösung von hyperbolischen PDgln.

Wie aus der Charakterisierung von PDgln. in Abschnitt 1.2 hervorgeht, erfordert die (numerische) Lösung hyperbolischer PDgln. einen deutlich größeren Aufwand. Dies ist im Wesentlichen durch deren dynamische Eigenschaften begründet, die sich durch die **Ausbildung charakteristischer Wellenphänomene** auszeichnet. Für lineare hyperbolische PDgln. stellt insbesondere die numerische Auflösung der **Propagation von Diskontinuitäten entlang Charakteristiken** eine Schwierigkeit dar. Im Fall quasilinearer und nichtlinearer hyperbolischer PDgln. treten neue Effekte wie Schockwellen und Verdünnungswellen auf, deren numerische Erfassung spezielle Ansätze (z.B. sogenannte „Upwind“- oder hochauflösende Verfahren) erfordert.

An numerischen Lösungspaketen sind neben den vielen, für einzelne spezielle Problemstellungen verfügbaren, Einzelprogrammen insbesondere die Werkzeuge

- CENTPACK („Centpack“ 2014) und CLAWPACK („Clawpack“ 2014): für quasilineare Systeme hyperbolischer PDgln. in 1–2(3) Ortsdimensionen, auf Fortran/C++ basierend mit Matlab–Schnittstelle zur Graphikausgabe, sehr effizient erfordert aber ausreichend theoretisches Wissen
- MATMOL („Matmol“ 2014): Matlab–Toolbox, die einige Upwind– und hochauflösende Verfahren implementiert, erfordert theoretisches Grundwissen

zu nennen. Oftmals bieten moderne FEM–Pakete wie ANSYS weitreichende numerische Möglichkeiten, die die Lösung gewisser quasilinearer hyperbolischer Probleme erlauben.

Sehr empfehlenswerte und umfassende Ausführungen zur mathematischen Theorie und numerischen Lösung von insbesondere hyperbolischen PDgln. bieten die Monographien (Thomas, 1998; Godlewski und Raviart, 1996; LeVeque, 2002).

## Literatur

- Bathe, K. (1995). *Finite element procedures*. Prentice Hall (siehe S. C11).
- „Centpack“ (2014). In: (Siehe S. C14).
- „Clawpack“ (2014). In: (Siehe S. C14).
- Fletcher, C. (1984). *Computational Galerkin Methods*. New York: Springer-Verlag (siehe S. C11).
- Godlewski, E. und P. Raviart (1996). *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Bd. 118. Applied mathematical sciences. New York: Springer-Verlag (siehe S. C14).
- LeVeque, R. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press (siehe S. C14).
- „Matmol“ (2014). In: (Siehe S. C14).
- Schwarz, H. (1997). *Numerische Mathematik*. Teubner-Verlag, Stuttgart (siehe S. C11, C13).
- Thomas, J. (1998). *Numerical partial differential equations: Finite difference methods*. Bd. 22. Texts in applied mathematics. New York: Springer-Verlag (siehe S. C14).

